＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４１＞

ある恒等式を見出し、そこからラマヌジャン式を経由してレムニスケート周率 ϖ を表す無限積公式を得たので報告したい。得られた恒等式と無限積公式を青色の＜Ｆ１＞、＜Ｆ２＞で下方に示す。前回までの主要な結果と一緒に示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a) のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a\neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数である。さらに、$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad\text{-----<1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad\text{-----<2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad\text{-----<3>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right)\quad\text{-----<4>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad\text{-----<5>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right)\quad\text{----<6>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh2a}}\right)+\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh4a}}\right)+\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh6a}}\right)+\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh8a}}\right)+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{cha}}\right) \quad \text{--<A>}$$

$(a \neq 0)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh8a}}\right)+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sha}}\right) \quad \text{--<B>}$$

$(a \neq 0)$

$$\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{ch2a}}\right)-\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{ch4a}}\right)+\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{ch6a}}\right)-\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{ch8a}}\right)+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{cha}}\right) \quad \text{----<C>}$$

$(a \neq 0)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch8a}}\right)+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sha}}\right) \quad \text{--<D>}$$

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{\text{ch2a}-\text{cha}}{\text{ch2a}+\text{cha}}\right)\times\left(\frac{\text{ch4a}+\text{cha}}{\text{ch4a}-\text{cha}}\right)\times\left(\frac{\text{ch6a}-\text{cha}}{\text{ch6a}+\text{cha}}\right)\times\left(\frac{\text{ch8a}+\text{cha}}{\text{ch8a}-\text{cha}}\right)\times\cdot\cdot=\text{th}\left(\frac{a}{2}\right) \quad \text{----<E>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \quad \text{----<F1>}$$

$(a > 0)$

$$\varpi=\pi\cdot e^{-\pi/6}\cdot\sqrt{2}\cdot\left((1-e^{-2\pi})\times(1-e^{-4\pi})\times(1-e^{-6\pi})\times(1-e^{-8\pi})\times\cdot\cdot\right)^{2} \quad \text{---<F2>}$$

==================================

青色の二つが今回、新たに得られた。

＜Ｆ２＞は＜Ｆ１＞からすぐに出るが、それは下記証明で示したように、ラマヌジャン式を利用することで得られた。ここで ϖ はレムニスケート周率であり、円周率の類似物である。レムニスケート周率 ϖ は、数学でも数学史の意味でもたいへん重要な量である。

$$\frac{1}{(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}+\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+\cdot\cdot\ =-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\varpi}{\pi\sqrt{2}}\right)$$

証明ではこのラマヌジャン式を利用した。この式は、ϖ と e と π が出ていて深いものである。

なお、今回の式も、Excel での数値検証で正しいことを確認している。

＜Ｆ１＞、＜Ｆ２＞の証明の概要を示す。紙幅を節約するため、概要、流れだけ示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｆ１＞、＜Ｆ２＞の証明の概要

ある意図から次の①の変形を試みた。

$$2\left(\frac{\cos x}{1(e^{a}-1)}+\frac{\cos 2x}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\cos 3x}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\cos 4x}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\quad\right)\quad \text{----①}$$

これを（ゼータの香り・・その３０７）での深フーリエ級数[2]を用いて変形していった。途中、１２年前に双曲線ゼータ導出で使った手法と類似の方法を使った。⇒ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)
変形の結果、次式に行き着いた。

$$2\left(\frac{\cos x}{1(e^{a}-1)}+\frac{\cos 2x}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\cos 3x}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\cos 4x}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\quad\right)$$
$$=\{a-\log(2(\mathrm{ch}a-\cos x))\}+\{2a-\log(2(\mathrm{ch}2a-\cos x))\}+\{3a-\log(2(\mathrm{ch}3a-\cos x))\}+\{4a-\log(2(\mathrm{ch}4a-\cos x))\}+\cdot\cdot$$

上式の x に 0 を代入して変形していくと、次の＜Ｆ１＞に到達する。

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right)\quad \text{----<F1>}$$
$$(a>0)$$

ここで、次のラマヌジャン式に着目する。ここで ϖ はレムニスケート周率である。

$$\frac{1}{(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}+\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+\cdot\cdot\ =-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\varpi}{\pi\sqrt{2}}\right)\quad \text{----②}$$

＜Ｆ１＞の a に 2π を代入すると上記②左辺になる。その観点から次の＜Ｆ２＞が得られる。

$$\varpi = \pi \cdot e^{-\pi/6} \cdot \sqrt{2} \cdot \left((1 - e^{-2\pi}) \times (1 - e^{-4\pi}) \times (1 - e^{-6\pi}) \times (1 - e^{-8\pi}) \times \cdot \cdot \right)^2 \quad \text{---＜F2＞}$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｆ１＞、＜Ｆ２＞は、このようにして得られた。＜Ｆ１＞は調和のとれたよい形をしている。左辺が右辺に一致することは、私には自明なこととは思えないがどうだろうか。

最後に、気になることや想うことなど、述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●両式を再掲。

$$\frac{1}{(e^{a}-1)} + \frac{1}{2(e^{2a}-1)} + \frac{1}{3(e^{3a}-1)} + \frac{1}{4(e^{4a}-1)} + \cdot \cdot$$

$$= \log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})} \times \frac{1}{(1-e^{-2a})} \times \frac{1}{(1-e^{-3a})} \times \frac{1}{(1-e^{-4a})} \times \cdot \cdot \right) \quad \text{----＜F1＞}$$

$$(a > 0)$$

$$\varpi = \pi \cdot e^{-\pi/6} \cdot \sqrt{2} \cdot \left((1 - e^{-2\pi}) \times (1 - e^{-4\pi}) \times (1 - e^{-6\pi}) \times (1 - e^{-8\pi}) \times \cdot \cdot \right)^2 \quad \text{---＜F2＞}$$

＜Ｆ１＞は、任意の正の実数で成り立つので恒等式である。その左辺を見ると、誰でもラマヌジャンの式を連想する。いま私がやっている三角関数＆双曲線関数の融合域は、ラマヌジャン式に似た形のものがよく出てくる。

これまで②のラマヌジャン式は気になっていたものの、そこに行くには汚い？地帯を通らねばならず、気が進まずにきた。今回思い切ってその地帯を通過したところ、きれいな地帯に抜け出ることができた。

●ゼータの周辺は、美と調和に満ち満ちていて（三角関数や双曲線関数の世界）、最後はうまくいくというか、美しいものにたどり着くことが多い。景色でいえば、日和のよい穏やかな丘陵地帯を散策しているような感じである。

ゼータの香りの漂うシリーズでは、山あり谷ありの長い旅をしてきた感覚がある。途中、断崖絶壁を登ることも何度かあったが、総じてきれいな景色を満喫してきた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.2.18　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学の夢」(岩波書店、黒川信重)

・「数論Ⅱ」(岩波書店、黒川、栗原、斎藤)