＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４０＞

さらに恒等式が二つ得られたので示したい。以下の青色の＜５＞、＜６＞である。前回までの分と一緒に示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。
さらに、$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a-1}-\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------<1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}-\frac{1}{\mathrm{ch}a+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------<2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------<3>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{------<4>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------<5>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<6>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+\cdot\ \cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)\quad \text{--<A>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\ \cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)\text{--<B>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+-\cdot\ \cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)\quad \text{---<C>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\ \cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)\quad \text{--<D>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}\right)\times\cdot\ \cdot=\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)\quad \text{----<E>}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

青色の二つが今回、新たに得られた。いずれも公式集にないので、新種の式と考えられる。これらもやはりきれいであり、他式同様、ふしぎな感じの式である。

証明は前回示した＜１＞の証明と類似のものとなるので、略す。

なお、すべての式において、Excel での数値検証で正しいことを確認している。

最後に、気になることや想うことなど、述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜１＞、＜３＞、＜４＞などは、ラマヌジャン式（Σ○/(e^2nπ－1)）にすこし似た感じの式になっていて、その 意味で”ラマヌジャンの香りが漂う式”といえるかもしれない。

●＜１＞と＜２＞、＜４＞と＜５＞、そして＜３＞と＜６＞がそれぞれ一対のペアを形成しているように見える。その形で並べ直すと以下となり、より一層美しさが際立つような気がする。

＜１＞と＜２＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{------}<1>$$

$(\mathrm{a}>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{------}<2>$$

$(\mathrm{a}>0)$

＜４＞と＜５＞

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \qquad \text{------}<4>$$

$(\mathrm{a}\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{------}<5>$$

$(\mathrm{a}\neq 0)$

＜３＞と＜６＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(\mathrm{a}/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{------}<3>$$

$(\mathrm{a}\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\mathrm{a}/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \qquad \text{-----}<6>$$

$(\mathrm{a}\neq 0)$

●今回の式も証明はできたが、どこまでもふしぎさは残り、なぜこんな等式が成立するのか、その真のカラクリはわからない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.2.12　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）