＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３９＞ rev1.1

さらに恒等式が四つ得られたので示したい。以下の青色の＜１＞～＜４＞である。前回の＜Ａ＞～＜Ｅ＞と一緒に示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。

さらに、$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<4>}$$

$(a\neq 0)$

$$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right) \quad \text{--<A>}$$

$(a\neq 0)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right) \text{--<B>}$$

$(a\neq 0)$

$$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right) \quad \text{----<C>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right) \quad \text{--<D>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\left(\frac{\mathrm{ch2a-cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a+cha}}{\mathrm{ch4a-cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a-cha}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a+cha}}{\mathrm{ch8a-cha}}\right)\times\cdot\cdot=\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right) \quad \text{----<E>}$$

$$(a > 0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

青色の四つが新たに得られた。いずれの式も公式集にないので、新種の式と考えられる。

これらはきれいであり、ふしぎな感じの式である。ここ１年は、無限級数＝無限級数という形の恒等式を多く得てきたが、前回あたりから、値＝無限級数（or 無限積）という形の式が得られ始めた。

なお、すべての式において、Excel での数値検証で正しいことを確認している。

＜１＞ の証明の概要を示す。詳細の手順は少し長くなる。紙幅を節約するため、概要、流れだけ示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜１＞の証明の概要

１年半前に＜ゼータの香り・・（その２１３）＞で示した次の母等式を出発点にする。

$$\frac{\sin x}{e^a-1}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-1}+\frac{\sin\ 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\sin x}{\mathrm{cha}-\cos x}+\frac{\sin x}{\mathrm{ch}2a-\cos x}+\frac{\sin x}{\mathrm{ch}3a-\cos x}+\frac{\sin x}{\mathrm{ch}4a-\cos x}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----①}$$

$$(-\pi \leq x \leq \pi, \quad a > 0)$$

この式の x に ia/2 を代入して（i は虚数単位）、得た式に対し a を 2a で置き換えると、次のようになる。

$$\frac{1}{e^a}+\frac{1}{e^{2a}}+\frac{1}{e^{3a}}+\cdot\cdot=\mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a-cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a-cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a-cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----②}$$

上式の左辺は、こちらで示したフーリエ級数の②で x に 0 を代入した値つまり”$-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sha}}{2(\mathrm{cha}-1)}$”で置き換えられ、その結果、上式は次となる。＜1＞に到達した。

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}<1>$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜１＞は、このようにして得られた。

＜２＞の証明も同様にできる。＜３＞は＜１＞と＜２＞の辺々足し算して変形を加えれば出る。＜４＞も＜３＞と同じようにして出る。

最後に、気になることや想うことなど、つぶやいておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ここ１年得てきた恒等式はといえば、例えば、下記のような「無限級数」＝「無限級数」という形のものが多かった。＜ゼータの香り・・(その２９５)＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+-\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

両辺ともゼータの香り漂う式となっていて、これはこれで味わい深いが、今回や前回の「値＝無限級数(or 無限積)」という形はもっと大事なものと思う。

●＜３＞と＜４＞を再掲。これらは任意の a で成り立っていてふしぎであり、眺めていて飽きない。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(\mathrm{a}/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}<3>$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{------}<4>$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

この導出には、高校レベルの数学しか使っていない。

前回の繰り返しになるが、簡単な道具を使って、得られたことが大事である。数学の世界ではどういうわけか、高級な道具を使うことが高級な数学と思われているふしがあるが、それは間違っている。簡単な道具で面白い結果が出るのが一番である。

その意味で数学は料理に似ている。

身の回りの食材や安価な器具で、うまい料理ができるのがよい。

高級な食材や高額の器具を使わないとうまいものができないというのは、よいことではない。

●以前から、こんな形の式（値＝無限級数）が出るはずと思ってきたが、ようやくという感じである。それにはある気づきが必要だったが、長く気づかなかった。その気づきというのは、一例として、今回の証明の母等式①での左辺の形が、x に ia/2（i は虚数単位）を代入すると、ある一つの値になるという気づきである。

●その気づきがあったおかげで、他の多くの母等式にも類似として適用可能とわかり、どんどん新たな恒等式が発見できていくというそんなプロセスを経験している。

数学というのは１点突破が全面突破であるとつくづく思う。

●今回の式も証明はできたが、どこまでもふしぎさは残り、なぜこんな等式が成立するのか、その真のカラクリはわからない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.2.3　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

[改訂]

rev1.1　証明中のミスを訂正した。