＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３８＞

新たに恒等式が五つ得られたので示す。以下の＜Ａ＞～＜Ｅ＞である。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ <u>sh, ch, th と略記</u>した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a\neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。
さらに、$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式＞

$$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)$$ --＜A＞

$$(a\neq 0)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)$$ --＜B＞

$$(a\neq 0)$$

$$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)$$ ----＜C＞

$$(a\neq 0)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)$$ --＜D＞

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}\right)\times\cdot\cdot=\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)$$ ----＜E＞

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

得られた恒等式はこの五つである。いずれの式も公式集にないので、新種の式と考えられる。

＜Ａ＞～＜Ｄ＞は四式でセットになっている感じがあり、美と調和に満ちている。＜Ａ＞と＜Ｃ＞の右辺、そして＜Ｂ＞と＜Ｄ＞の右辺は、<u>同じである</u>ことにも着目いただきたい。

＜Ｅ＞は、とても面白い形をしている。

これまで得てきた恒等式で、このような乗算的なものはほとんどなく、魅惑的な式といえる。左辺の掛け算の各項の（）内の分子と分母は、足し算、引き算が偶数番目項と奇数番目項で逆になっているので、注意いただきたい。

なお、すべての式において、Excel での数値検証で正しいことを確認している。

＜Ｅ＞の証明の概要を以下に示す。詳細の手順は長くなる。紙幅を節約するため、概要、流れだけ示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｅ＞の証明の概要

ある意図から次の①、②の変形を試みた。

$$\frac{\cos x}{1(e^{a}+1)}-\frac{\cos 2x}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\cos 3x}{3(e^{3a}+1)}-\frac{\cos 4x}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$$\frac{\cos x}{1(e^{a}+1)}+\frac{\cos 2x}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\cos 3x}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\cos 4x}{4(e^{4a}+1)}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

これらをそれぞれ変形していった。変形の過程で（ゼータの香り・・その３０７）での深フーリエ級数の[1]と[2]を①、②に対しそれぞれ用いた。変形の結果、次の二式に行き着いた。

$$2\left(\frac{\cos x}{1(e^{a}+1)}-\frac{\cos 2x}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\cos 3x}{3(e^{3a}+1)}-\frac{\cos 4x}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot\right)$$
$$=\{-a+\log(2(\mathrm{ch}a+\cos x))\}-\{-2a+\log(2(\mathrm{ch}2a+\cos x))\}+\{-3a+\log(2(\mathrm{ch}3a+\cos x))\}-\{-4a+\log(2(\mathrm{ch}4a+\cos x))\}+-\cdot\cdot$$

$$2\left(\frac{\cos x}{1(e^{a}+1)}+\frac{\cos 2x}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\cos 3x}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\cos 4x}{4(e^{4a}+1)}+\cdot\cdot\right)$$
$$=\{a-\log(2(\mathrm{ch}a-\cos x))\}-\{2a-\log(2(\mathrm{ch}2a-\cos x))\}+\{3a-\log(2(\mathrm{ch}3a-\cos x))\}-\{4a-\log(2(\mathrm{ch}4a-\cos x))\}+-\cdot\cdot$$

上記二式の x に ia/2 を代入して（i：虚数単位）、それぞれある式が得られる。それらの式同士の辺々を割り算すると、次の＜Ｅ＞に到達する。

$$\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot=\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right) \quad \text{----<E>}$$

$$(a>0)$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｅ＞はこのようにして得られた。手順は長くなるのだが、長いだけで初等的な数学しか使っていない。

＜Ａ＞～＜Ｄ＞の証明も本質的なところは、＜Ｅ＞と同じである。

最後に、気になることや想うことなど、つぶやいておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●　ここ１年多くの恒等式を得てきたが、例えば、下記のような「無限級数」＝「無限級数」という形のものが多かった。＜ゼータの香り・・（その２９５）＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot$$

$$(a\neq 0)$$

これらは両辺ともゼータの香り漂う式となっていて味わいがあるが、今回の「無限級数(or 無限積)」＝値という形はもっと大事な気がする。

●＜Ｅ＞を再掲。この式は、ふしぎさが漂っており眺めていて飽きない。

$$\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot=\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)\quad ----<\mathrm{E}>$$

$$(a>0)$$

この導出には、高校レベルの数学しか使っていない。

簡単な道具を使って、得られたことが大事である。世間では、高級な道具を使うことが高級な数学と思われているふしがあるが、それは間違いと思う。簡単に面白い（深い）結果が出るのが一番である。

●その意味で数学は料理に似ている。

身の回りの素材や安価な器具で、うまい料理ができるのがよい。

高級な素材や高額の器具を使わないとうまいものができないというのは、よいことではない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.1.28　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅰ」､「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)