＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３６＞

πに関する新たな恒等式を見出したので報告したい。青色の A2 である。前に報告した式 A1 と一緒に示した。

また双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば sh5a は sinh(5a)のことである。$\tan^{-1}$ は Arctan である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した恒等式 ＞

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{---A1}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---A2}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回、A2 式を見出した。公式集にないので新種かと思われる。A1 は２か月前に発見し既に報告したものであり、A2 とは兄弟分の関係にある式と思う。

両式とも任意の a で成り立つ点がふしぎである。a の値を大きくするほど、収束速度は上がっていく。

A2 の導出方法（証明）の概要を簡潔に記す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ A2 の導出方法(証明)の概要＞

こちらで示した深フーリエ級数において、それらを生み出す元となる“ある二種の”（二つの）母等式から、まず次の等式を導いた。

$$\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{sha}}-\frac{\mathrm{sin3x}}{\mathrm{3sh3a}}+\frac{\mathrm{sin5x}}{\mathrm{5sh5a}}-\frac{\mathrm{sin7x}}{\mathrm{7sh7a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{\mathrm{cha+sinx}}{\mathrm{cha-sinx}}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch3a+sinx}}{\mathrm{ch3a-sinx}}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch5a+sinx}}{\mathrm{ch5a-sinx}}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch7a+sinx}}{\mathrm{ch7a-sinx}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{----①}$$

(a は 0 より大きい任意の実数。x は任意の実数。)

（ゼータの香り・・その３０７）での深フーリエ級数の[4]と[8]とから、次の等式が成り立つ。ここで th^{-1} は Arctanh である。

$$\log\left(\frac{\mathrm{cha+sinx}}{\mathrm{cha-sinx}}\right)=2\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{cha}}\right) \quad \text{----②}$$

上式を①の右辺に適用すると、①は次となる。

$$\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{sha}}-\frac{\mathrm{sin3x}}{\mathrm{3sh3a}}+\frac{\mathrm{sin5x}}{\mathrm{5sh5a}}-\frac{\mathrm{sin7x}}{\mathrm{7sh7a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{cha}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot \qquad \text{----③}$$

ここで x＝ix（i：虚数単位）を上式に代入する。sin(ix)＝ish(x)などの公式を使って、最終的に式を整理すると i が消え、次式を得る。

$$\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{sha}}-\frac{\mathrm{sh3x}}{\mathrm{3sh3a}}+\frac{\mathrm{sh5x}}{\mathrm{5sh5a}}-\frac{\mathrm{sh7x}}{\mathrm{7sh7a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot \qquad \text{----④}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

さて、上式で、x がたまたま a に一致する場合（地点 x＝a）を考える。x が a と一致する地点でもたしかに式は成り立っている。a が 0～∞の範囲(a>0 の)の全ての各実数点 a において x が a と一致する点を拾い続け、その拾っていった点をすべてつないで構成される次式は、当然成り立つ。

$$\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sha}}-\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{3sh3a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{5sh5a}}-\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{7sh7a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot$$

左辺を整理して、次を得る。

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot \qquad \text{----⑤}$$

上式の左辺はπ/4 であるから、これで目標の A2 に到達した。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot \qquad \text{---A2}$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして A2 を得た。
ポイントは、x を ix に置き換える点と、③で x を a に置き換える点である。

前者は、三角関数と双曲線関数の融合域の研究において私が使っている方法で有用である。後者の x を a で置き換える手法は証明中でも書いているように少しややこしい説明を必要とし、思想的に深いものを含んでいる。

なお、この二つのポイントは A1 の導出でも使っている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ここ最近で見出した積分式や恒等式などで「深い」「浅い」という表現をよく使ってきた。どちらになるかは証明中でも見たように、等式の x を a で(or 逆でも OK)置き換える作業があるかないかで決まる。

置き換える作業がある場合⇒深い

置き換える作業がない場合⇒浅い

となる。

A1 も A2 も、その作業があるので深いものとなる。

●深いといってもやっていることは簡単で、x を a で置き換えるだけである。全く簡単である。前回までの積分式にしても今回の恒等式にしても、高校レベルの数学しか使っていない。簡単な道具で作れるのがよい。

世間では（数学では？）複雑なことが高級という考えが横行しているが、それは間違っていると思う。

シンプル　イズ　ベスト

である。

●二式再掲。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{---A1}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---A2}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

やはりふしぎである。これらには「ふしぎ」という言葉しか出てこない。

●証明中の①式を見つけたのは4ヶ月前である。①には異様なものを感じたが、ここから A2 などが出てくるとは思わなかった。証明中の②がキーとなった。②のおかげで、i がきれいに消えてくれた。いま見れば、A2 の導出自体は簡単だが、気付くのに時間がかかった。数学は時間がかかる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.1.7　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）