＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３５＞

倍角公式をもう一つ見出したので報告したい。下方の青色のものである。前回までの積分式、倍角公式とともに示した。あと、L(2)の積分式[D8]で書き損じがあったのでこの稿で訂正した(shx⇒sinx)。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots$＝カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x)のこと, shax は sinh(ax)のことである。log は自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}dx \qquad \text{-----[A1]}$$

$$\log 2=\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A2]}$$

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{-----[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin a}{\mathrm{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

（a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。）

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B4]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B5]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \qquad \text{------[B6]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2-1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \qquad \text{------[B7]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=\int_0^{\infty}\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \qquad \text{-----[C1]}$$

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^{\infty}\{\log(2(\mathrm{ch}x+\cos x))-x\}dx \qquad \text{---[C2]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{\mathrm{ch}x-\cos x}\right)dx \qquad \text{------[C3]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{------[C4]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[C5]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)dx$$ -------[C6]

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ ------[C7]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ -------[C8]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\cos x}{\mathrm{ch}ax-\cos x}\right)dx$$ -------[C9]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ -------[C10]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ -------[C11]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/(4a))\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx$$ -------[C12]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx$$ ---[C13]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x))\}dx$$ --[C14]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx$$ ---[C15]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/a)\int_0^\infty\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\cos x))\}dx$$ ----[C16]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(2)=(1/2)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx$$ ------[D1]

$$L(2)=\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ -------[D2]

$$L(2)=(1/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ -------[D3]

$$L(2)=(1/2)\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{ch}x}dx$$ -------[D4]

$$L(2)=\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x}\right)dx$$ -------[D5]

$$L(2)=(3/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x}\right)dx$$ -------[D6]

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ -------[D7]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ -------[D8]

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ -------[D9]

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ -------[D10]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx$$ ------[D11]

(a は 0 でない任意の実数)

[上記のカテゴリーに入らないもの]

$$\frac{\pi/(2a)}{\mathrm{ch}(\pi/(2a))}=\int_0^\infty \frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}dx$$ -------[E1]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(\pi/(2a))\mathrm{th}(\pi/(2a))=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}dx \qquad \text{-------[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2\left\{\frac{1}{(1a)^2+1}-\frac{1}{(3a)^2+1}+\frac{1}{(5a)^2+1}-\frac{1}{(7a)^2+1}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad \text{-----[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

次式は E1 と E2 から簡単に出る。参考。

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}dx=\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad \text{-------[E1\&E2 から]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＜ 倍角公式（二重倍角公式） ＞

$$\tan^{-1}(\sin 2A／\mathrm{sh}2B)=\tan^{-1}(\tan A／\mathrm{th}B)-\tan^{-1}(\tan A\cdot\mathrm{th}B) \qquad \text{---F1}$$

(A は(2n − 1) π /2 でない任意の実数、B は 0 でない任意の実数)

$$\tan^{-1}(\tan 2A／\mathrm{th}2B)=\tan^{-1}(\tan A／\mathrm{th}B)+\tan^{-1}(\tan A\cdot\mathrm{th}B) \qquad \text{---F2}$$

(A は(4n − 1) π /4＜|A|＜(4n + 1) π /4 を満たす任意の実数（n は任意の整数)。B は 0 でない任意の実数)

$$\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}2A／\mathrm{th}2B)=\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}A／\mathrm{th}B)+\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}A\cdot\mathrm{th}B) \qquad \text{---F3}$$

(A, B は|A|＜|B|を満たす任意の実数)

$$\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{sh}2A／\mathrm{sh}2B)=\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}A／\mathrm{th}B)-\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}A\cdot\mathrm{th}B) \qquad \text{----F4}$$

(A, B は|A|＜|B|を満たす任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

F4 の式を今回見出した。$\tan^{-1}$ と th^{-1} は、Arctan、Arctanh である。公式集にないので新種かと思われる。A とBの条件から、もっとも一般的に成り立つのは F1 である。

二変数で成り立つ倍角公式なので、「二重倍角公式」と名付けた。

F4 の導出は簡単である。F1 の A を iA(i は虚数単位)で置き換え、sin(iA)＝i・shA などの公式を使えば出る。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 積分式や倍角公式は、三角関数と双曲線関数の融合的な領域から出る。ここは巨大な洞窟であり、入り込んで2年ほどになる。

この領域では見たこともない鉱物（公式）がたくさん出てくる。ここは三角関数と双曲線関数という関数が二つ、且つ二変数である。そのことが多くの結果を生み出している。

● 積分式や倍角公式が出ること自体、大規模な構造が地下に潜んでいることが想像される。想像はされても、全体像などまったくわからない。一人ぽつねんとその真っ暗な洞窟にいる状態であり、危ないところがあるので、ゆっくりと進んでいる。

●恒等式も多く出してきたが、＜ゼータの香り・・その306＞で報告した次式が気に入っている。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

これは本当にふしぎな式であり、何度見ても飽きない。下式の類似物とも見える。

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\ \cdot$$

●M さんからの助言もあり、π に関する式を調べると、歴史的にも π を表す式は $\tan^{-1}$ のものが多いとわかった。
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%86%86%E5%91%A8%E7%8E%87%E3%81%AE%E8%BF%91%E4%BC%BC

ガウスやオイラーも $\tan^{-1}$ 式を出している。

一つの上での式を再掲。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

この式のふしぎな点は任意の正実数 a で成り立つ点である。a を大きくするほど速く左辺に収束する。

●いま思いついたこと。

$$\mathrm{L}(2)=\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chx}}\right)\mathrm{dx} \qquad \text{--------[D5]}$$

$$L(2)=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{--------[D8]}$$

$$(a\text{ は }0\text{ でない任意の実数})$$

これらから次が成り立つ。

$$(2/(a^2+1))\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chx}}\right)dx = \int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}}\right)dx$$

　これは、被積分関数の中から a を外へ引っ張り出す公式と考えられる。他の積分式でも同様に成り立っているようだが、なにかに応用できそうな気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.1.4　杉岡幹生

＜参考文献＞
・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）