＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３４＞

--- 新種の積分の導出（その９） ---

新種と考えられる積分式を新たに十個見出したので報告したい（下方の青色の[A5]～[A6] 、[B6]～[B7] 、[C11]～[C16]）。前回までの分につけ加える形で示した。さらに倍角公式を発見した。下方の青色。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots=$カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x)のこと，shax は sinh(ax)のことである。log は自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log2=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{-----[A1]}$$

$$\log2=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A2]}$$

$$\log2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \qquad \text{-----[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log2=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\log2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{-----[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\log2=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^\infty (1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin a}{\mathrm{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

（a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。）

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B4]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B5]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}\right)dx \qquad \text{-----[B6]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2-1)/a)\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}\right)dx \qquad \text{-----[B7]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=\int_0^\infty\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \qquad \text{-----[C1]}$$

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^\infty\{\log(2(\mathrm{ch}x+\cos x))-x\}dx \qquad \text{---[C2]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{\mathrm{ch}x-\cos x}\right)dx \qquad \text{------[C3]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{------[C4]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[C5]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[C6]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{-----[C7]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[C8]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^{\infty} \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\cos x}{\mathrm{ch}ax-\cos x}\right)dx \qquad \text{------[C9]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[C10]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{------[C11]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/(4a))\int_0^{\infty} \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[C12]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot\ =\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx \quad \text{---[C13]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot\ =\pi^2/12=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x))\}dx \quad \text{--[C14]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot\ =\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx \quad \text{---[C15]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot\ =\pi^2/6=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\cos x))\}dx \quad \text{----[C16]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \qquad \text{------[D1]}$$

$$L(2)=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{-------[D2]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{-------[D3]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{-------[D4]}$$

$$L(2)=\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{-------[D5]}$$

$$L(2)=(3/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x}\right)dx \qquad \text{-------[D6]}$$

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{-------[D7]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{-------[D8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[D9]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[D10]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx \qquad \text{------[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

[上記のカテゴリーに入らないもの]

$$\frac{\pi/(2a)}{\mathrm{ch}(\pi/(2a))}=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{-------[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(\pi/(2a))\mathrm{th}(\pi/(2a))=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx$$ --------[E2]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2\left\{\frac{1}{(1a)^2+1}-\frac{1}{(3a)^2+1}+\frac{1}{(5a)^2+1}-\frac{1}{(7a)^2+1}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx$$ ------[E3]

(a は 0 でない任意の実数)

次式は E1 と E2 から簡単に出る。参考。

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx=\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^\infty\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx$$ --------[E1＆E2 から]

(a は 0 でない任意の実数)

==================================

今回、青色の１０式を見出した。公式集にないので新種の積分式と思う。

それらは全て、任意の実数 a で成り立つものとなっていて（a に条件はつく）、ふしぎな形をしている。

これら積分式は深い所から来たものと浅い所から来たものに分かれると述べてきたが、今回の10式はすべて深い所から来ている。

＜見出した積分式＞の全式は、計算アプリ Wolfram Alpha で数値検証を行っており、正しさは確認済みである。

今回の式の導出方法（証明）は略すが、こちらで示したフーリエ級数と深フーリエ級数（それらのさらなる変形版も含む）に、下方の変数定数倍−積分定理を適用すれば出る。すなわち「こちらの B-1(今の[B1])での証明・・」と類似の方法で導出（証明）できる。

＜変数定数倍−積分定理＞

任意の実関数 F(x) に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^\infty F(cx)dx=(1/c)\int_0^\infty F(x)dx$$

以上。

この定理はこちらで証明したものだが、そのときは変数定数倍−積分定理という名前はまだつけていない。

今回、積分式を調べている途上で、以下の倍角公式を見出した。

==================================

＜ 見出した倍角公式 ＞

$$\tan^{-1}(\sin 2A／\mathrm{sh}\,2B)=\tan^{-1}(\tan A／\mathrm{th}\,B)-\tan^{-1}(\tan A\cdot\mathrm{th}\,B)$$ ---F1

(A は(2n − 1) π /2 でない任意の実数、B は 0 でない任意の実数)

$$\tan^{-1}(\tan 2A／\mathrm{th}2B)=\tan^{-1}(\tan A／\mathrm{th}B)+\tan^{-1}(\tan A\cdot\mathrm{th}B) \quad \text{---F2}$$

(Aは$(4n-1)\pi/4<|A|<(4n+1)\pi/4$を満たす任意の実数（nは任意の整数)。Bは0でない任意の実数)

$$\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}2A／\mathrm{th}2B)=\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}A／\mathrm{th}B)+\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}A\cdot\mathrm{th}B) \quad \text{---F3}$$

(A, Bは$|A|<|B|$を満たす任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらを見出した。出たとき、すぐに倍角公式になっていると気づいた。
もちろん$\tan^{-1}$とth^{-1}はそれぞれArctan、Arctanhである。

いずれも素晴らしい形をしている。ＡとＢの条件から、もっとも一般的に成り立つのはＦ１であり、次にＦ３，Ｆ２という感じになっている。
二変数で成り立つ倍角公式なので、「二重倍角公式」とでも名付けたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 倍角公式には驚いた。
こんな式が地中に埋もれていたのか！と思った。
私がいまやっているのは、三角関数と双曲線関数の融合域だが、ここは私以外に人がおらず、未開拓の領域という感じである。
そこは、例えていえば、恐竜化石の一大産出地帯であり、まだ手つかずの状態だから、あちこちに化石が地上に一部が見えた状態で露出している。
なので、高価な重機（高等数学）を使わずとも、スコップなど簡単な道具（高校レベルの数学）で簡単に掘り出せる。

●昔は、数学で新たなことを発見するには最先端の知識がないと無理だと思っていたが、これまでの経験から、その考えは完全に間違っている。
数学者が成してきた仕事というのは、大鉱山の坑道を掘り進めた結果であって、それは数学全体から見れば、まったく一部でしかない。掘られていない領域は手つかずのまま多く残っている。それは、初等的な領域においてもそうである。数学（自然）は巨大であって、それに比べ人間はあまりに小さい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.12.24　杉岡幹生

＜参考文献＞
・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）