< 双曲線ゼータとその派生式 その３３>

--- 新種の積分の導出（その８） ---

新種と考えられる積分式をさらに四つ見出したので報告したい（下方の青色の[C10]と[E1]〜[E3]）。前回までの分につけ加える形で示した。[E1]〜[E3]は、[上記のカテゴリーに入らないもの]に置いた。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1\ -1/3\ +1/5\ -1/7\ +-\cdot\cdot=\pi/4$

$L(2)=1\ -1/3^2\ +1/5^2\ -1/7^2\ +-\cdot\cdot=0.91596559\cdot\cdot=$カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1\ +1/3^2\ +1/5^2\ +1/7^2\ +\cdot\cdot=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1\ +1/3^s\ +1/5^s\ +1/7^s\ +\cdot\cdot=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x)のこと, shax は sinh(ax)のことである。log は自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

< 見出した積分式 >

$$\log 2=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{-----[A1]}$$

$$\log 2=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A2]}$$

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \qquad \text{-----[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\mathrm{chx+sina}}{\mathrm{chx-sina}}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

(a は 0 < |a| ≤ π/2 を満たす任意の実数。 a → 0 でも式は成立。)

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{sinx\cdot shax}}{\mathrm{ch2ax+cos2x}}\right)dx \qquad \text{-----[B4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{cosx\cdot chax}}{\mathrm{ch2ax+cos2x}}\right)dx \qquad \text{-----[B5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot\ =\pi^2/6=\int_0^{\infty}\{x-\log(2(\mathrm{chx}-\mathrm{cosx}))\}dx \qquad \text{-----[C1]}$$

$$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot\ =\pi^2/12=\int_0^{\infty}\{\log(2(\mathrm{chx}+\mathrm{cosx}))-x\}dx \qquad \text{---[C2]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chx+cosx}}{\mathrm{chx-cosx}}\right)dx \qquad \text{-------[C3]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shx}}\right)dx \qquad \text{-------[C4]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chx}}\right)dx \qquad \text{-------[C5]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{chx}}\right)dx \qquad \text{-------[C6]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{------[C7]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \qquad \text{-------[C8]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chax+cosx}}{\mathrm{chax-cosx}}\right)dx \qquad \text{-------[C9]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[C10]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=(1/2)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \qquad \text{-------[D1]}$$

$$L(2)=\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{--------[D2]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{--------[D3]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^\infty \left(\frac{x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{--------[D4]}$$

$$L(2)=\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{--------[D5]}$$

$$L(2)=(3/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x}\right)dx \qquad \text{--------[D6]}$$

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D7]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D9]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D10]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx \qquad \text{-------[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

[上記のカテゴリーに入らないもの]

$$\frac{\pi/(2a)}{\mathrm{ch}(\pi/(2a))}=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx \qquad \text{--------[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(\pi/(2a))\mathrm{th}(\pi/(2a))=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \qquad \text{--------[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2\left\{\frac{1}{(1a)^2+1}-\frac{1}{(3a)^2+1}+\frac{1}{(5a)^2+1}-\frac{1}{(7a)^2+1}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

次式は E1 と E2 から簡単に出る。参考。

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx=\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx \qquad \text{--------[E1\&E2 から]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は、[C10]と[E1]～[E3]の青色の４式を見出した（最後の[E1＆E2 から]は除く）。公式集にないので新種の積分式と思う。どれもきれいである。

それらは全て、任意の実数 a で成り立つものとなっていて（a に条件はつく）、ふしぎである。

最後の[E1＆E2 から]は、[E1]と[E2]から簡単に出るので出す必要はないが、美しい式であり参考に置いた。

[E3]の左辺は、[E1]や[E2]のように明示的な表現は不可能と思う。それは a を 1/a とするとゼータの香りの漂う式の L(2)類似物になることからも容易に想像できる。

前回、これら積分式は深い所から来たものと浅い所から来たものに分かれると述べたが、今回の4式はすべて深い所から来ている。

なお、＜見出した積分式＞の全式は、計算アプリ Wolfram Alpha で数値検証を行っており、正しさは確認済みである。

今回の式の導出方法（証明）は略すが、こちらで示したフーリエ級数と深フーリエ級数（それらのさらなる変形版も含む）に、下方の変数定数倍−積分定理を適用すれば出る。すなわち「こちらの B−1(今の[B1])での証明‥」と類似の方法で導出（証明）できる。

＜変数定数倍−積分定理＞

任意の実関数 F(x) に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty}F(cx)dx=(1/c)\int_0^{\infty}F(x)dx$$

以上。

この定理はこちらで証明したものだが、そのときは変数定数倍-積分定理という名前はまだつけていない。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●以前 Wolfram Alpha であそんでいると、

$$(\pi/2)\mathrm{th}(\pi/2)=\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$

を出してきた。きれいでなにかがある式と感じられ、いつか出したいと思っていた。気になっていたのだが、今回 a を含む一般式として[E2]を（手計算で）出すことができた。[E1]の方が先に出た。

●[E1]も[E2]も、a を具体的な数値にした場合は Wolfram Alpha は具体的に値を出す。しかし a のままでは「計算時間制限を超えました...」として今回のような結果は出してこない。裏で出してくれる不定積分は超幾何関数などが絡んだ複雑なものとなっている。よって両式は新種の式と考えてよいと思う。

●[E1]～[E3]に関して。

ここ数か月、フーリエ級数(or その類似式)が変数定数倍-積分定理が適用できる場合、そこから積分式を得る作業をずっとやってきた。しかし、その定理が適用できない級数式もあって、それはあきらめていた（困難があった）。ところが式[D10]（下記）がその困難を解消してくれた。その結果、[E1]を得ることができた。

a が入った積分式たちは、変数定数倍-積分定理の適用範囲を広げてくれる！と分かった。[E2]も[E3]も同じように出る。

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[D10]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

●[E3]左辺の級数がもし超越数ならば（超越数と思う）、積分式で表現できているのでそれはコンツェヴィッチのいう”周期”となる。π は積分式で表現できるので「周期である」、e は積分式で表現できないので「周期でない」だったはずである。

コンツェヴィッチによりに提案された、超越数を分類する”周期”という概念はとても重要と思う。

●最後の式をながめたい。美しい式である。

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx=\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^\infty \left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{-------[E1\&E2 から]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.12.17　杉岡幹生

<参考文献>

・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）