＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３２＞

--- 新種の積分の導出（その７） ---

新種と考えられる積分式をさらに九つ見出したので報告したい（下方の青色の[A3]～[A4]、[B4]～[B5]、[C8]～[C9]と[D9]～[D11]]）。前回までの分につけ加える形で示した。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1 -1/3 +1/5 -1/7 +-\cdot\cdot=\pi/4$

$L(2)=1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2 +-\cdot\cdot=0.91596559\cdot\cdot$＝カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1 +1/3^2 +1/5^2 +1/7^2 +\cdot\cdot=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1 +1/3^s +1/5^s +1/7^s +\cdot\cdot=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x)のこと，shax は sinh(ax)のことである。log は自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[A1]}$$

$$\log 2=\int_0^{\infty}\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A2]}$$

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{------[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{------[B2]}$$

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin a}{\mathrm{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

（a は 0 < |a| ≤ π/2 を満たす任意の実数。 a → 0 でも式は成立。）

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x \cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B4]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x \cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B5]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=\int_0^{\infty}\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \qquad \text{-----[C1]}$$

$$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^{\infty}\{\log(2(\mathrm{ch}x+\cos x))-x\}dx \qquad \text{---[C2]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{\mathrm{ch}x-\cos x}\right)dx \qquad \text{------[C3]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{------[C4]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[C5]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[C6]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{-----[C7]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[C8]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\cos x}{\mathrm{ch}ax-\cos x}\right)dx \qquad \text{------[C9]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty} \log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \qquad \text{-------[D1]}$$

$$L(2)=\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{--------[D2]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{--------[D3]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{--------[D4]}$$

$$L(2)=\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{--------[D5]}$$

$$L(2)=(3/2)\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x}\right)dx \qquad \text{--------[D6]}$$

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D7]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D9]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D10]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^{\infty} \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx \qquad \text{-------[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は青色の９式を見出した。公式集にないので新種の積分式と思う。どれもふしぎな形をしていて神秘的である。理論的に導出できても、どこまでいってもふしぎさは消えない。

それらは全て、任意の実数 a で成り立つものとなっている（それぞれ a に条件はつく）。

[D1] と[D11]を比べたい。

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \qquad \text{-------[D1]}$$

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx \qquad \text{------[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

よく見ると、[D1] は[D11]で a を 1 とした場合のものとなっている。[D1]を見出したときはこれが最終形かと思っていたが、じつは一般的な[D11]の特別なケースであったのだ。

[D1]は導出の過程から見て、地下の深いところからきているが、[D11]はもう一段深い地点から来ている。
[D1]は、こちらの B-1(今の[B1])での証明と同類の方法で導出（証明）し、[D11]もそれと類似の方法で出した。

なお、＜見出した積分式＞の全式は、計算アプリ Wolfram Alpha で数値検証を行っており、正しさは確認済みである。

今回、見出した式の導出方法（証明）の詳細は略すが、前回のこちらで示したフーリエ級数に、下方の変数定数倍-積分定理を適用すれば出る。

＜変数定数倍-積分定理＞

任意の実関数 F(x) に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty}F(cx)dx=(1/c)\int_0^{\infty}F(x)dx$$

以上。

この定理はこちらで証明したものだが、そのときは変数定数倍-積分定理という名前はまだつけていない。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

================================
●上方で次のように書いた。

****
[D1]は導出の過程から見て、地下の深いところからきているが、[D11]はもう一段深い地点から来ている。

なお、[D1]は、こちらの B-1(今の[B1])での証明と同類の方法で導出（証明）されたものであり、[D11]もそれと類似の方法で導出された。
****

じつは今回見出した積分式はすべて簡単に出る。一つ出すのに 10 分もかからない。上記の「こちらの B-1(今の[B1])での証明･･」と同じようにして出せる。

この種の積分式を見出した当初（数か月前）、簡単に出せるので深い内容が含まれているとは思っていなかったのだが、「こちらの B-1(今の[B1])での証明･･」あたりから、だんだんと深い内容を含んでいることに気づき始めた。よって、下記のようにその証明の冒頭にその辺りを書いた。

> ⑥で、a がたまたま x に一致する場合（地点 x＝a）を考える。a が x と一致する x でもたしかに⑥式は成り立っている。x が 0～∞の範囲（x＞0 の）の全ての各実数点 x において a が x と一致する点を拾い続け、その拾っていった点をすべてつないで構成される次式は、当然成り立つ（これは x＝0 でも成り立つ）。

上記のように方法自体は a を x で置き換えるだけであり、それをなした式に変数定数倍-積分定理を適用するだけである。まったく簡単である。
任意の a で成り立つ今回の積分式の場合でも、a を ax で置き換えて同様にすればやはり簡単に出る。

●このように今回見出した積分式も導出（証明）自体は簡単である。高校生でも（主婦でも？）できる。
機械的にできるので簡単なのだが（a を x や ax で置き換えるだけ！）、しかし上記のサイト引用文に記したように思想的には深いものを含んでおり、その意味では簡単ではない。

神様が実数の全ての点（非可算個！）で一つ一つの成立点をピンセットで拾っていってすべての点をつなげて構成するというきわめてデリケートな作業過程を含んでいる（a を x に置き換えるケースより、ax に置き換えるケースの方がじつはもっと深い）。

冒頭に記したすべての積分式では、そのデリケートな過程をもつものとその過程を持たないものに分かれる。
「前者は深いところから来ていて、後者は浅いところから来ている」と言えそうだ。

見出した積分式に対し、これまで「深い、浅い」と言ってきたのはそのような意味である。今回の青色の積分式たちはすべて前者に属し、深いところからやってきている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.12.10　杉岡幹生

＜参考文献＞
・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）