

＜ 双曲線ゼータとその派生式 その31 ＞

--- 新種の積分の導出 (その6) ---

新種と考えられる積分式をさらに七つ見出したので報告したい (下方の[C5]~[C7]と[D5]~[D8])。前回までの分につけ加える形で示した。

さらに新たな深フーリエ級数[7]と[8]を得た。最後に興味ある恒等式を示した。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$$

$$L(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \dots = 0.91596559 \dots = \text{カタランの定数}$$

$$Z(2) = (3/4) \zeta(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots = \pi^2/8$$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、 $Z(s) = 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + \dots = (1 - 1/2^s) \zeta(s)$ であり、本質的に $\zeta(s)$ そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x) のことである。log は自然対数である。

=====

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2 = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{\operatorname{ch} x + \cos x} \right) dx \quad \text{-----[A1]}$$

$$\log 2 = \int_0^\infty \left\{ 1 - \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \cos x} \right) \right\} dx \quad \text{-----[A2]}$$

$$L(1) = \pi/4 = 2 \int_0^\infty \left(\frac{\sin x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2x} \right) dx \quad \text{-----[B1]}$$

$$L(1) = \pi/4 = 2 \int_0^\infty \left(\frac{\cos x \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2x} \right) dx \quad \text{-----[B2]}$$

$$\pi = \int_0^\infty (1/a) \log \left(\frac{\operatorname{ch} x + \sin a}{\operatorname{ch} x - \sin a} \right) dx \quad \text{-----[B3]}$$

(a は $0 < |a| \leq \pi/2$ を満たす任意の実数。 $a \rightarrow 0$ でも式は成立。)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \pi^2/6 = \int_0^\infty \{ x - \log(2(\operatorname{ch} x - \cos x)) \} dx \quad \text{-----[C1]}$$

$$(1/2) \zeta(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \pi^2/12 = \int_0^\infty \{\log(2(\operatorname{ch}x + \cos x)) - x\} dx \quad \text{---[C2]}$$

$$Z(2) = \pi^2/8 = (1/2) \int_0^\infty \log \left(\frac{\operatorname{ch}x + \cos x}{\operatorname{ch}x - \cos x} \right) dx \quad \text{-----[C3]}$$

$$Z(2) = \pi^2/8 = \int_0^\infty \tan^{-1} \left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh}x} \right) dx \quad \text{-----[C4]}$$

$$Z(2) = \pi^2/8 = \int_0^\infty \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x} \right) dx \quad \text{-----[C5]}$$

$$Z(2) = \pi^2/8 = (1/2) \int_0^\infty \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}x} \right) dx \quad \text{-----[C6]}$$

$$Z(2) = \pi^2/8 = ((a^2+1)/(2a)) \int_0^\infty \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}ax} \right) dx \quad \text{-----[C7]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2) = (1/2) \int_0^\infty \log \left(\frac{\operatorname{ch}x + \sin x}{\operatorname{ch}x - \sin x} \right) dx \quad \text{-----[D1]}$$

$$L(2) = \int_0^\infty \tan^{-1} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh}x} \right) dx \quad \text{-----[D2]}$$

$$L(2) = (1/2) \int_0^\infty \tan^{-1} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}x} \right) dx \quad \text{-----[D3]}$$

$$L(2) = (1/2) \int_0^\infty \left(\frac{x}{\operatorname{ch}x} \right) dx \quad \text{-----[D4]}$$

$$L(2) = \int_0^\infty \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sin x}{\operatorname{ch}x} \right) dx \quad \text{-----[D5]}$$

$$L(2) = (3/2) \int_0^\infty \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}2x} \right) dx \quad \text{-----[D6]}$$

$$L(2) = ((a^2 - 1)/2) \int_0^\infty \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}ax} \right) dx \quad \text{-----[D7]}$$

(a は、|a| が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2) = ((a^2 + 1)/2) \int_0^{\infty} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}ax} \right) dx \quad \text{-----[D8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

=====

今回は[C5]～[C7]と[D5]～[D8]を見出した。公式集にないので新種の積分式と思う。これまでになかった $\operatorname{Arctanh}$ すなわち th^{-1} (つまり tanh^{-1}) の積分が出たことも新鮮である。

注記: Yさんからの情報では、逆双曲線関数と対数関数をつなぐ公式があるとのことであった。公式集を見るとたしかにあった(「数学公式 I」(岩波) p.36 あたり)。 th^{-1} の積分式は \log の積分式に置き換えることができるのかもしれない。直感では現時点ではかなり難しい。

今回のもので最も注目すべきは、[C7]と[D7]と[D8]である。

これらは全くふしぎな形をしている。なんと任意の実数 a で成り立つのである! (それぞれ a に条件はつく)。

なお、[B3]でも任意の実数 a が入っているが、それより[C7]と[D7]と[D8]の方がより深い地点から来ている。

ここで、[C7]、[D7]、[D8]を並べよう。

$$Z(2) = \pi^2/8 = ((a^2+1)/(2a)) \int_0^{\infty} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\operatorname{cos}x}{\operatorname{ch}ax} \right) dx \quad \text{-----[C7]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2) = ((a^2 - 1)/2) \int_0^{\infty} \operatorname{tan}^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}ax} \right) dx \quad \text{-----[D7]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2) = ((a^2 + 1)/2) \int_0^{\infty} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}ax} \right) dx \quad \text{-----[D8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

これらはやはりふしぎである。理論的に導出できても、どこまでいってもふしぎさは消えない。

ところで、[C5]は[C7]の特別な場合になっている([C7]での $a=1$)。また[D6]は[D7]の、さらに[D5]は[D8]の特別な場合である。よって、それら特別なケースの記載は不要かもしれないが、見出した順番が特別な場合が先であったので、そのままおいている。

なお、<見出した積分式>の全式は、計算アプリ Wolfram Alpha で数値検証を行っており、正しさは確認済みである。

今回、見出した積分式の導出方法(証明)の詳細は略すが、以下に示したフーリエ級数に、下方の変数定数倍-積分定理を適用すれば出る。

そして今回[7]と[8]の深フーリエ級数を新たに追加した。

注記:これらフーリエ級数の周期(例えば、 $-\pi \leq x \leq \pi$ など)はもしかしたら間違っているかもしれず、将来訂正することもあり得る。フーリエ級数の本体式さえ合っていれば、恒等式や積分式が問題なく得られていくので、あまり気にせずに行っている。ご了解願います。

これまでに得たフーリエ級数と変数定数倍-積分定理を再掲しておく。積分式や恒等式は、これらフーリエ級数(と変数定数倍-積分定理)を使って得られていく。

=====

< フーリエ級数 >

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 2x}{e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{e^{3a}} + \frac{\sin 4x}{e^{4a}} + \dots = \frac{\sin x}{2(\text{cha} - \cos x)} \quad \text{-----①}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 2x}{e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{e^{3a}} + \frac{\cos 4x}{e^{4a}} + \dots = -\frac{1}{2} + \frac{\text{sha}}{2(\text{cha} - \cos x)} \quad \text{-----②}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 2x}{e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{e^{3a}} - \frac{\sin 4x}{e^{4a}} + \dots = \frac{\sin x}{2(\text{cha} + \cos x)} \quad \text{-----③}$$

($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 2x}{e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{e^{3a}} - \frac{\cos 4x}{e^{4a}} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{\text{sha}}{2(\text{cha} + \cos x)} \quad \text{-----④}$$

($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, a > 0$)

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 3x}{e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{e^{5a}} + \frac{\sin 7x}{e^{7a}} + \dots = \frac{\sin x \cdot \text{cha}}{\text{ch}2a - \cos 2x} \quad \text{-----⑤}$$

($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, a > 0$)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 3x}{e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{e^{5a}} - \frac{\sin 7x}{e^{7a}} + \dots = \frac{\sin x \cdot \text{sha}}{\text{ch}2a + \cos 2x} \quad \text{-----⑥}$$

($0 \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{e^{7a}} + \dots = \frac{\cos x \cdot \text{sha}}{\text{ch}2a - \cos 2x} \quad \text{-----⑦}$$

($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 3x}{e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{e^{5a}} - \frac{\cos 7x}{e^{7a}} + \dots = \frac{\cos x \cdot \text{cha}}{\text{ch}2a + \cos 2x} \quad \text{-----⑧}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

< 深フーリエ級数 >

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 2x}{2e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} - \frac{\cos 4x}{4e^{4a}} + \dots = (1/2)\{-a + \log(2(\cosh a + \cos x))\} \quad \text{----[1]}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 2x}{2e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 4x}{4e^{4a}} + \dots = (1/2)\{a - \log(2(\cosh a - \cos x))\} \quad \text{----[2]}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/4)\log\left(\frac{\cosh a + \cos x}{\cosh a - \cos x}\right) \quad \text{----[3]}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{5e^{5a}} - \frac{\sin 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/4)\log\left(\frac{\cosh a + \sin x}{\cosh a - \sin x}\right) \quad \text{----[4]}$$

($0 \leq x \leq 2\pi, a > 0$)

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{5e^{5a}} + \frac{\sin 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sinh a}\right) \quad \text{----[5]}$$

($0 \leq x \leq 2\pi, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} - \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sinh a}\right) \quad \text{----[6]}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/2)\text{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\cosh a}\right) \quad \text{----[7]}$$

($-\pi \leq x \leq \pi, a > 0$)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{5e^{5a}} - \frac{\sin 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/2)\text{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cosh a}\right) \quad \text{----[8]}$$

($0 \leq x \leq 2\pi, a > 0$)

=====

< 変数定数倍-積分定理 >

任意の実関数 $F(x)$ に関して、 $0 \sim \infty$ の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、 $c > 0$ の実定数である。

$$\int_0^\infty F(cx) dx = (1/c) \int_0^\infty F(x) dx$$

以上。

この定理は[こちら](#)で証明したものだが、そのとき変数定数倍-積分定理という名前はまだつけていなかった。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

=====

●上方の深フーリエ級数に[7]、[8]を追加していて、あることに気付いた。

なんと[7]と[3]の左辺が同じである！ さらに[8]と[4]の左辺が同じである！

[3]と[7]を並べよう。

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/4)\log\left(\frac{\text{cha} + \cos x}{\text{cha} - \cos x}\right) \quad \text{----}[3]$$

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \dots = (1/2)\text{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\text{cha}}\right) \quad \text{----}[7]$$

はじめて見たとき驚いたが、しかしこれは正しく、Excel での数値検証でも正しい。

[3]と[7]から以下の<A 1>が、[8]と[4]から<B 1>が得られる。

$$(1/4)\log\left(\frac{\text{cha} + \cos x}{\text{cha} - \cos x}\right) = (1/2)\text{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\text{cha}}\right) \quad \text{----}<A1>$$

(a と x は cha = cos x ではない任意の実数)

$$(1/4)\log\left(\frac{\text{cha} + \sin x}{\text{cha} - \sin x}\right) = (1/2)\text{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\text{cha}}\right) \quad \text{----}<B1>$$

(a と x は cha = sin x ではない任意の実数)

ここで、<A 1>と<B 1>は (x の変数変換 $x = \pi/2 - x$ から) 完全同値と気づく。

よって<A 1>でも<B 1>でもどちらでもよい。

これらはふしぎであり、美しい関係である。上方でも述べた Y さんからの逆双曲線関数と対数関数の関連性を追求すれば、これは自然に出てくるのだろうか。

●<A1>は、形を整えて<A 2>としよう。

$$\log\left(\frac{\text{cha} + \cos x}{\text{cha} - \cos x}\right) = 2\text{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\text{cha}}\right) \quad \text{----}<A2>$$

(a と x は cha = cos x ではない任意の実数)

これは、面白い恒等式である。

● さらに<A 2>で、 $a=x$ とした次式も成り立つ。

$$\log\left(\frac{\operatorname{ch}x+\cos x}{\operatorname{ch}x-\cos x}\right)=2\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right) \quad \text{----<A3>}$$

(x は0でない任意の実数)

これも面白い恒等式である。この<A 3>は、単に<A 2>で $a=x$ とただけの式に見えるかもしれないが、<A 2>より高級である。

実数の全ての各 x 点（非可算個！）において、（神様が？）一つ一つデリケートに<A 2>の a が x に一致する場合ばかりを拾って行ってそれら全部を繋いで構成される式である。それが高級の意味である。

●<A 3>はそのように繊細な過程を経て得られる式であるが（空想の中では即座）、形式的にはただ<A 2>で $a=x$ とするだけであり、中学生でもできる。

=====

2023. 12. 03 杉岡幹生

<参考文献>

・「数学公式 I」、「数学公式 II」（森口・宇田川・一松、岩波書店）