```
NI = NIntegrate[area01[u, v], {u, 0, Pi / 2}, {v, 0, Pi / 2}]
```

```
0.556324
```

アステロイドの表面積

定義と描画

定義

アステロイドの曲面の式は、
astell[u_,v_]:=a{Sin[u]Cos[v],Sin[u]Sin[v],Cos[u]}^3
であるが、便宜上a=1とする。
$a \neq 1$ の場合、astell[u_, v_] := {Sin[*u*] Cos[*v*], Sin[*u*] Sin[*v*], Cos[*u*]}^3
に、 a^2 をかければよい。

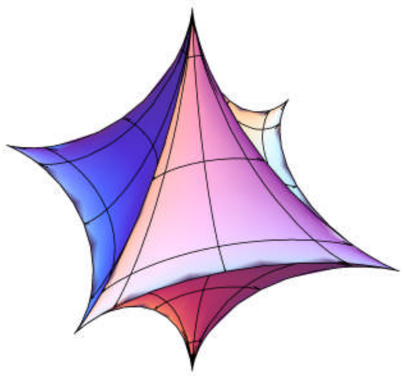
```
astell[u_, v_] := {Sin[u] Cos[v], Sin[u] Sin[v], Cos[u]}^3
```

描画

```
u =.
```

```
v =.
```

```
ParametricPlot3D[astell[u, v] // Evaluate, {u, -0, 2 Pi},
 {v, 0, 2 Pi}, Axes → None, Boxed → False, PlotRange → All]
```



面積要素の算出

定義

面積要素はinfareaで与えられる。
曲面は 三次元ベクトル x[u,v]で与えられているものとする。

```
ee[x_][u_, v_] := D[x[u, v], u].D[x[u, v], u]
ff[x_][u_, v_] := D[x[u, v], u].D[x[u, v], v]
gg[x_][u_, v_] := D[x[u, v], v].D[x[u, v], v]
infarea[x_][u_, v_] := Sqrt[(ee[x][u, v] gg[x][u, v] - ff[x][u, v]^2)]
```

アステロイドの面積要素

アステロイドの場合、以下の関数area01[u, v] を、$\left\{u, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$, $\left\{u, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$ で積分し、8 をかければよい。

```
area01[u_, v_] := √(Factor[Expand[infarea[astell][u, v]^2]]) // Evaluate
```

```
? area01
```

```
Global`area01
```

$$\text{area01}[u\_, v\_] := 9\sqrt{\left(\text{Cos}[u]^2\,\text{Cos}[v]^2\,\text{Sin}[u]^8\,\text{Sin}[v]^2\left(\text{Cos}[v]^2+\text{Sin}[v]^2\right)\left(\text{Cos}[u]^2+\text{Cos}[v]^4\,\text{Sin}[u]^2\,\text{Sin}[v]^2+\text{Cos}[v]^2\,\text{Sin}[u]^2\,\text{Sin}[v]^4\right)\right)}$$

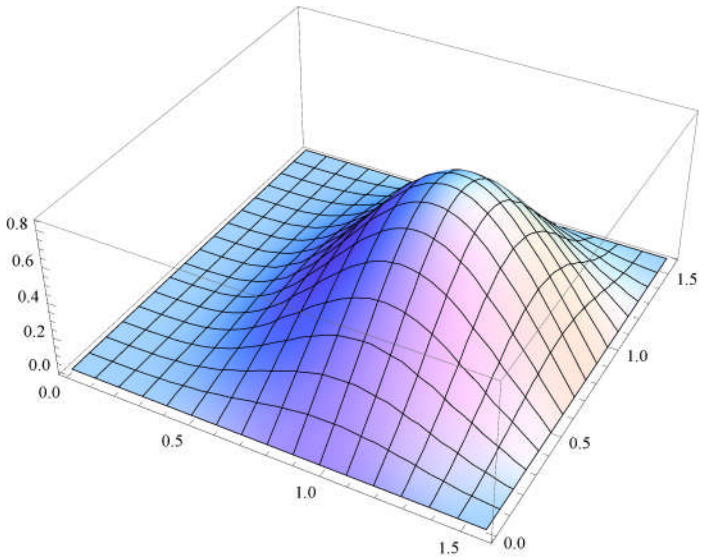
area01[u, v]^2

$$81\,\text{Cos}[u]^2\,\text{Cos}[v]^2\,\text{Sin}[u]^8\,\text{Sin}[v]^2\left(\text{Cos}[v]^2+\text{Sin}[v]^2\right)\left(\text{Cos}[u]^2+\text{Cos}[v]^4\,\text{Sin}[u]^2\,\text{Sin}[v]^2+\text{Cos}[v]^2\,\text{Sin}[u]^2\,\text{Sin}[v]^4\right)$$

数値解の計算

面積要素のプロット

```
u =.
v =.
Plot3D[area01[u, v], {u, 0, Pi / 2}, {v, 0, Pi / 2}]
```



数値解

数値解は、「解析学大要」の解答と一致している。

```
NI = NIntegrate[area01[u, v], {u, 0, Pi / 2}, {v, 0, Pi / 2}]
```

0.556324

```
NI * 8
```

4.45059

$$\text{N}\left[17\,\frac{\text{Pi}}{12}\right]$$

4.45059

解析解の計算

式の変型(1) u,vの分離

式を簡略化し、置換積分がやりやすいようにする

```
Clear[u, v]

A[u_] := 81 Cos[u]^2 Sin[u]^8

B[v_] := Sin[v]^2 Cos[v]^2

Together[area01[u, v]^2 / (A[u] * B[v])]
```

$(\mathrm{Cos}[v]^2 + \mathrm{Sin}[v]^2)\ (\mathrm{Cos}[u]^2 + \mathrm{Cos}[v]^4\,\mathrm{Sin}[u]^2\,\mathrm{Sin}[v]^2 + \mathrm{Cos}[v]^2\,\mathrm{Sin}[u]^2\,\mathrm{Sin}[v]^4)$

```
F[u_, v_] :=
 FullSimplify[(Cos[v]^2 + Sin[v]^2)] (Cos[u]^2 + Cos[v]^4 Sin[u]^2 Sin[v]^2 + Cos[v]^2
        Sin[u]^2 Sin[v]^4) /. {Sin[v]^2 → 1 - Cos[v]^2,
     Sin[v]^4 → (1 - Cos[v]^2)^2} // Expand // Evaluate

?F
```

Global`F

$F[u\_, v\_] := \mathrm{Cos}[u]^2 + \mathrm{Cos}[v]^2\,\mathrm{Sin}[u]^2 - \mathrm{Cos}[v]^4\,\mathrm{Sin}[u]^2$

```
Clear[u, v, t]

G[u_, t_] := F[u, v] /. {Cos[v]^2 → t, Cos[v]^4 → t^2} // Evaluate

?G
```

Global`G

$G[u\_, t\_] := \mathrm{Cos}[u]^2 + t\,\mathrm{Sin}[u]^2 - t^2\,\mathrm{Sin}[u]^2$

置換積分 $(\mathrm{Cos}[u]^2 \to t)$

$\mathrm{Cos}[u]^2 \to t$とおいて置換積分を行う。
この際、
$dv = \dfrac{1}{2 * B[v]}$ dtであり、被積分関数が、$t = 0$の偶関数であり、
積分の範囲が$\{t, -1, 1\}$ことから
以後の積分(範囲が $\{t, 0, 1\}$)には4をかければよい。

$$\mathrm{Integrate}\left[\sqrt{A[u]\,G[u, t]},\ \left\{u, 0, \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right\},\ \{t, 0, 1\}\right]$$

をもとめる。

再度数値積分を試みる,

```
Clear[u, v, t]
```

$$\texttt{NIntegrate}\left[\sqrt{\texttt{A[u] G[u, t]}}, \left\{\texttt{u, 0, }\frac{\texttt{Pi}}{\texttt{2}}\right\}, \{\texttt{t, 0, 1}\}\right] * 4$$

```
4.45059
```

計算を簡単にするため、$G[u, t]$ のなかの$\mathrm{Sin}[u]^2$を外へだす。

$$\texttt{G[u, t]} / \texttt{Sin[u]}^2$$

$$\texttt{Csc[u]}^2 \left(\texttt{Cos[u]}^2 + \texttt{t Sin[u]}^2 - \texttt{t}^2 \texttt{Sin[u]}^2\right)$$

```
Clear[u, v, t]
```

$$\texttt{FullSimplify}\left[\texttt{A[u] Sin[u]}^2 \left(\texttt{Cot[u]}^2 + \texttt{t} - \texttt{t}^2\right) - \texttt{A[u] G[u, t]}\right]$$

```
0
```

$$\texttt{A[u] Sin[u]}^2$$

$$\texttt{81 Cos[u]}^2 \texttt{Sin[u]}^{10}$$

以下のようにA01, B01を定義すると、求めるのは

$$\mathrm{Integrate}\left[\mathrm{A01}[u]\ \mathrm{B01}[u, t], \{t, 0, 1\}, \left\{u, 0, \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right\}\right]$$

$$\texttt{A01[u\_] := }\sqrt{\texttt{A[u] Sin[u]}^2} \texttt{ // Evaluate}$$

```
? A01
```

```
Global`A01
```

$$\texttt{A01[u\_] := 9}\sqrt{\texttt{Cos[u]}^2 \texttt{Sin[u]}^{10}}$$

$$\texttt{B01[u\_, t\_] := }\sqrt{\left(\texttt{Cot[u]}^2 + \texttt{t} - \texttt{t}^2\right)}$$

$$\texttt{NIntegrate}\left[\texttt{A01[u] B01[u, t], \{t, 0, 1\}}, \left\{\texttt{u, 0, }\frac{\texttt{Pi}}{\texttt{2}}\right\}\right] * 4$$

$$4.45059 + 1.38813 \times 10^{-73}\, i$$

```
u =.
```

置換積分 (s=t-$\frac{1}{2}$)

$\left(s = t - \dfrac{1}{2}\right)$とおいて、置換積分を行う。

計算を容易にするため、$a = \mathrm{Cot}[u]^2 + \dfrac{1}{4}$ とする。

$$\text{I0} = \text{Integrate}\left[\sqrt{a - s^2}, \left\{s, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \text{Assumptions} \to \text{Re}\left[\sqrt{a}\right] \geq \frac{1}{2} \,||\, \text{Im}\left[\sqrt{a}\right] \neq 0\right]$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{1}{4}\sqrt{-1 + 4a} + a\,\text{ArcCsc}\left[2\sqrt{a}\right], \text{Re}[a] > 0\right]$$

積分したあとaを置き戻す。

$$\text{B02}[u\_] := \text{I0} \,/.\, a \to \text{Cot}[u]^2 + \frac{1}{4} \,//\, \text{Evaluate}$$

? B02

Global`B02

$$\text{B02}[u\_] := \text{ConditionalExpression}\left[\text{ArcCsc}\left[2\sqrt{\tfrac{1}{4} + \text{Cot}[u]^2}\right]\left(\tfrac{1}{4} + \text{Cot}[u]^2\right) + \tfrac{1}{4}\sqrt{-1 + 4\left(\tfrac{1}{4} + \text{Cot}[u]^2\right)}, \text{Re}\left[\text{Cot}[u]^2\right] > -\tfrac{1}{4}\right]$$

$$\text{FullSimplify}\left[\text{A01}[u]^2\, \text{B02}[u]^2\right]$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{81}{16}\text{Cos}[u]^2\left(2\sqrt{\text{Cot}[u]^2} + \text{ArcCsc}\left[\sqrt{1 + 4\,\text{Cot}[u]^2}\right]\left(1 + 4\,\text{Cot}[u]^2\right)\right)^2 \text{Sin}[u]^{10}, \text{Re}\left[\text{Cot}[u]^2\right] > -\frac{1}{4}\right]$$

$$\text{NIntegrate}\left[\sqrt{\left(\frac{81}{16}\text{Cos}[u]^4\,\text{Sin}[u]^8\,(2 + \text{ArcCot}[2\,\text{Cot}[u]]\,(4\,\text{Cot}[u] + \text{Tan}[u]))^2\right)}, \left\{u, 0, \frac{\text{Pi}}{2}\right\}\right] * 4$$

4.45059

面積要素は以下の様になる。

$$\text{Area0}[u\_] := \sqrt{\left(\frac{81}{16}\text{Cos}[u]^4\,\text{Sin}[u]^8\,(2 + \text{ArcCot}[2\,\text{Cot}[u]]\,(4\,\text{Cot}[u] + \text{Tan}[u]))^2\right)}$$

これを簡略化する。

$$\text{Area1}[u\_] := \frac{9}{4}\text{Cos}[u]^2\,\text{Sin}[u]^4\,(2 + \text{ArcCot}[2\,\text{Cot}[u]]\,(4\,\text{Cot}[u] + \text{Tan}[u]))$$

u =.

念のため、検算する

$$\text{FullSimplify}\left[\text{Area0}[u]^2 - \text{Area1}[u]^2\right]$$

0

$$\text{NIntegrate}\left[\text{Area1}[u], \left\{u, 0, \frac{\text{Pi}}{2}\right\}\right] * 4$$

4.45059

```
((∫_0^(Pi/2) Area1[u] ⅆu) // FullSimplify) * 4
```

$$\frac{17\,\pi}{12}$$