＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３０＞

--- 新種の積分の導出（その５） ---

新種と考えられる積分式を二つ見出したので報告したい（下方の[D3]と[D4]）。前回までの分につけ加える形で示した。[D4]は前回見出したもので既出の可能性も考えられるが、公式集にはなく美しいので掲載しておく。[D3]は新種と思う。

さらに新たな恒等式も三つ得られたので、一番最後に示した。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1\ -1/3\ +1/5\ -1/7\ +-\cdot\cdot=\pi/4$

$L(2)=1\ -1/3^2\ +1/5^2\ -1/7^2\ +-\cdot\cdot=0.91596559\cdot\cdot$＝カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1\ +1/3^2\ +1/5^2\ +1/7^2\ +\cdot\cdot=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1\ +1/3^s\ +1/5^s\ +1/7^s\ +\cdot\cdot=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x)のことである。log は自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{-----[A1]}$$

$$\log 2=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{-----[A2]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^\infty(1/A)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin A}{\mathrm{ch}x-\sin A}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

（A は $0<|A|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。$A\to 0$ でも式は成立。）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\ \cdot=\pi^2/6=\int_0^\infty\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \qquad \text{-----[C1]}$$

$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^\infty\{\log(2(\mathrm{chx}+\mathrm{cosx}))-\mathrm{x}\}\mathrm{dx}$ ---[C2]

$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{chx}+\mathrm{cosx}}{\mathrm{chx}-\mathrm{cosx}}\right)\mathrm{dx}$ ------[C3]

$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}$ ------[C4]

$L(2)=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{chx}+\mathrm{sinx}}{\mathrm{chx}-\mathrm{sinx}}\right)\mathrm{dx}$ ------[D1]

$L(2)=\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}$ -------[D2]

$L(2)=(1/2)\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}$ -------[D3]

$L(2)=(1/2)\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{chx}}\right)\mathrm{dx}$ -------[D4]

==================================

今回は[D3]、[D4]を新たに追加した。[D1]～[D4]を眺めよう。

$L(2)=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{chx}+\mathrm{sinx}}{\mathrm{chx}-\mathrm{sinx}}\right)\mathrm{dx}$ ------[D1]

$L(2)=\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}$ -------[D2]

$L(2)=(1/2)\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}$ -------[D3]

$L(2)=(1/2)\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{chx}}\right)\mathrm{dx}$ -------[D4]

これらを見ていると、ふしぎな感覚にとらわれる。このシンプルさは何なのか？[D2]と[D3]の類似性は何なのか？と。かなり以前、他の方法で L(2)を出したときはもっと複雑な積分になったが、0～∞の積分ではえらくすっきりしている。

形はすっきりだが、どれもその不定積分は初等的なものとはならない。これらが公式集にないのもふしぎである。

私の独断と偏見では、深さという点では[D1]、[D2]が深く、[D3]、[D4]は深くない。それは、導出過程で、前者では選択公理を無限回使うという特異な状況があるからである。

これらの式は、証明はできてもふしぎさは消えない。それは、加藤和也さんが

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdot\cdot = \pi^2/6$$

について「証明を知っても、いつまでもくみ尽くせないふしぎさが残る」と述べるのに似ている。

なお、＜見出した積分式＞の全式は計算アプリ Wolfram Alpha で数値検証を行っており、正しさは確認済みである。

[D3]の導出方法（証明）の詳細は略すが、最後に示した新種の恒等式＜1＞に、下方の変数定数倍−積分定理を適用すれば簡単に出る。

これまでに得たフーリエ級数と変数定数倍−積分定理を再掲しておく。積分式や恒等式は、これらフーリエ級数（と変数定数倍−積分定理）を使って得られていく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ フーリエ級数 ＞

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \qquad \text{------------①}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot\ =-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \qquad \text{------------②}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}-\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \qquad \text{-----------③}$$

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \qquad \text{------------④}$$

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \qquad \text{------------⑤}$$

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{----------⑥}$$

$(0 \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot \mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \qquad \text{------------⑦}$$

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{---------⑧}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

＜ 深フーリエ級数 ＞

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =(1/2)\{-a+\log(2(\mathrm{ch}a+\mathrm{c}x))\} \qquad \text{----[1]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+\cdot\cdot\ =(1/2)\{a-\log(2(\mathrm{ch}a-\mathrm{c}x))\} \qquad \text{----[2]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot\ =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos x}{\mathrm{ch}a-\cos x}\right) \qquad \text{----[3]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right) \qquad \text{----[4]}$$

$(0 \le x \le 2\pi,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot=(1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}\right) \qquad \text{----[5]}$$

$(0 \le x \le 2\pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot=(1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}a}\right) \qquad \text{----[6]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜変数定数倍−積分定理＞

任意の実関数 F(x)に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty} F(cx)dx=(1/c)\int_0^{\infty} F(x)dx$$

以上。

この定理はこちらで証明したものだが、そのとき変数定数倍−積分定理という名前はまだつけていなかった。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 新種の恒等式を三つ見出したので示しておく。

なお、$\tan^{-1}$ は Arctan のことであり、th^{-1} は $\tanh^{-1}$ つまり Arctanh のことである。

$$\frac{1}{\mathrm{cha}}-\frac{1}{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{ch}5\mathrm{a}}-\frac{1}{7\mathrm{ch}7\mathrm{a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3\mathrm{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5\mathrm{a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7\mathrm{a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----＜1＞}$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{ch}5\mathrm{a}}+\frac{1}{7\mathrm{ch}7\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}6\mathrm{a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}10\mathrm{a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}14\mathrm{a}}\right)+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----＜2＞}$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}3\mathrm{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}5\mathrm{a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}7\mathrm{a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----＜3＞}$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

●＜１＞は証明できずに苦しんでいたものだが、証明ができた。

この＜１＞に変数定数倍-積分定理を適用すれば、積分式[D3]が出る。

＜３＞は、＜１＞と兄弟の関係にあり、元となる母等式（母等式 A）は同一である。

＜２＞は、上記とは異なる母等式（母等式 B）から出た。母等式 B は母等式 A と兄弟分の関係にある。

●＜３＞はふしぎな式である。任意の正の実数 a でπを表現する恒等式といえるが、何度見てもふしぎである。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}3\mathrm{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}5\mathrm{a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}7\mathrm{a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----＜3＞}$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

この式の類似物とも見える。

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.11.18　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）