＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２９＞

--- 新種の積分の導出（その４） ---

新種と考えられる積分式をさらに二つ見出したので（下方の[C4]と[D2]）報告したい。前回までの分につけ加える形で示した。

新しい深フーリエ級数も二つ見出し（[５]と[６]）、それらも加えた。その深フーリエ級数から積分式（[C4]と[D2]）が得られ、さらに新種の恒等式（一番最後に示した）も得られた。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1\ -1/3\ +1/5\ -1/7\ +-\cdot\cdot=\pi/4$

$L(2)=1\ -1/3^2\ +1/5^2\ -1/7^2\ +-\cdot\cdot=0.91596559\cdot\cdot$＝カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1\ +1/3^2\ +1/5^2\ +1/7^2\ +\cdot\cdot=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1\ +1/3^s\ +1/5^s\ +1/7^s\ +\cdot\cdot=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的に$\zeta(s)$そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x)のことである。
log は自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[A1]}$$

$$\log 2=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A2]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^\infty(1/A)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin A}{\mathrm{ch}x-\sin A}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$

（A は $0<|A|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。$A\to 0$ でも式は成立。）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=\int_0^\infty\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \qquad \text{-----[C1]}$$

$$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^\infty\left\{\log\left(2(\mathrm{chx}+\mathrm{cosx})\right)-\mathrm{x}\right\}\mathrm{dx}\quad\text{---[C2]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{chx+cosx}}{\mathrm{chx-cosx}}\right)\mathrm{dx}\qquad\text{------[C3]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}\qquad\text{-------[C4]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{chx+sinx}}{\mathrm{chx-sinx}}\right)\mathrm{dx}\qquad\text{-------[D1]}$$

$$L(2)=\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}\qquad\text{--------[D2]}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は、[C4]と[D2]を得た。これも$\int_0^\infty$ ～ の形の新種の積分式と考えられる。二つを並べよう。

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}\qquad\text{-------[C4]}$$

$$L(2)=\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shx}}\right)\mathrm{dx}\qquad\text{---------[D2]}$$

逆三角関数の積分というこれまでにない形となったが、やはり$\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shx}}\right)$や$\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shx}}\right)$の形が変わっている。このような形は普通みかけない。上記の他の式でも同じことがいえるが、<u>三角関数と双曲線関数が対等に並ぶような形は変わっていてとてもふしぎである</u>。

また[C4]と[D2]でちょっとしか違っていないのが興味深い。L(2)では、Z(2)の sinx が cosx に置き換わっているだけである。
なお、＜見出した積分式＞の全式は、計算アプリ Wolfram Alpha で数値検証を行っており、正しさは確認済みである。

さて、[D2]の導出方法（証明）を示したい。
ただし、その前にこれまでに得た深フーリエ級数と<u>変数定数倍−積分定理</u>を再掲しておく。

“深フーリエ級数”は、＜フーリエ級数＞の式（今回は略）から導いたものだが、一段階深みをおびているので“深～”とした。[D2]の導出にこれらが関係する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 深フーリエ級数 ＞

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =(1/2)\{-a+\log(2(\mathrm{ch}a+cx))\}\quad ----[1]$$

$$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+\cdot\cdot\ =(1/2)\{a-\log(2(\mathrm{ch}a-cx))\}\quad ----[2]$$

$$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot\ =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos x}{\mathrm{ch}a-\cos x}\right)\quad ----[3]$$

$$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right)\quad ----[4]$$

$$(0\leq x\leq 2\pi,\ a>0)$$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot=(1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}\right)\quad ----[5]$$

$$(0\leq x\leq 2\pi,\ a>0)$$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot=(1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}a}\right)\quad ----[6]$$

$$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$$

==================================

＜変数定数倍–積分定理＞

任意の実関数 F(x) に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty}F(cx)dx=(1/c)\int_0^{\infty}F(x)dx$$

以上。

この定理はこちらで証明したものだが、そのとき変数定数倍–積分定理という名前はまだつけていなかった。

さて、以下で、次の[D2]の導出方法(証明)を示す。

$$L(2)=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx\qquad -----[D2]$$

==================================

＜ [D2]の導出(証明)＞

深フーリエ級数の［６］を使う。

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot = (1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}a}\right) \quad \text{----[6]}$$

$$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$$

［６］で、aがたまたまxに一致する場合（地点x＝a）を考える。aがxと一致するxでもたしかに［６］は成り立っている。xが0～∞の範囲（x＞0の）の全ての各実数点xにおいてaがxと一致する点を拾い続け、その拾っていった点をすべてつないで構成される次式は、当然成り立つ。これはx＝0でも成り立つ。

$$\frac{\cos x}{e^{x}}-\frac{\cos 3x}{3e^{3x}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5x}}-\frac{\cos 7x}{7e^{7x}}+-\cdot\cdot = (1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right) \quad \text{----[6]-2}$$

$$(0 \le x)$$

［６］は周期を繰り返す周期関数のフーリエ級数となっているが、［６］－２右辺はもはや周期関数でないのはいうまでもない。

上式の両辺に対し0～∞の範囲で積分を行うと、次となる。

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x}{e^{x}}-\frac{\cos 3x}{3e^{3x}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5x}}-\frac{\cos 7x}{7e^{7x}}+-\cdot\cdot\right)dx = \int_0^{\infty}(1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{----[6]-3}$$

[6]－2左辺の第n項までの和をSnとすると、Snはn->∞では[6]－2右辺に一様収束するから、上式[6]－3の左辺は項別積分が可能となり、次式が成り立つ。

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{e^{x}}dx-\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x}{3e^{3x}}dx+\int_0^{\infty}\frac{\cos 5x}{5e^{5x}}dx-\int_0^{\infty}\frac{\cos 7x}{7e^{7x}}dx+-\cdot\cdot = (1/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{---[6]-4}$$

[6]－4の左辺の各項に対し、変数定数倍－積分定理を適用して整理すると、次のようになる。

$$\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+-\cdot\cdot\right)\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{e^{x}}dx = (1/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$

ここで、$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+-\cdot\cdot = L(2)$、 $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{e^{x}}dx = 1/2$ であるから、上式は次となる。

$$L(2) = \int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{--------[D2]}$$

こうして[D2]に到達した。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして[D2]が得られた。

ポイントは、深フーリエ級数[6]を使い、[6]－4左辺の各項に変数定数倍－積分定理を使ったことにある。

なお、[C4]も、深フーリエ級数[５]から全く同様にして導くことができる（略）。

じつは[D2]を得る周辺で、ある積分式を得た。次の[W]であるが、それも今回の式と一緒に並べよう。

****

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sinx}{\mathrm{shx}}\right)dx \qquad \text{-------[C4]}$$

$$L(2)=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{shx}}\right)dx \qquad \text{---------[D2]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{chx}}\right)dx \qquad \text{---------[W]}$$

****

[C4]と[D2]は対称的で美しい。

[W]はあまりに簡明で、出たときは信じられなかった。計算アプリ Wolfram Alpha の数値計算でもたしかに成り立っている。公式集（<参考文献>）に載っていないので驚くが、おそらく既知かと思う。というのは Wolfram はＣ≈0.915966 と出すから！Ｃはカタランの定数（Catalan’s constant）のＣかと思える。L(2)＝「カタランの定数」なので、計算アプリは[W]を公式として組み込んでいるのでは？と思う。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●冒頭の log2＝1 -1/2 +1/3 -1/4 +-・・はリーマン・ゼータζ(s)の極ζ(1)＝1 +1/2 +1/3 +1/4 +・・の化身の意味をもち、その意味で重要である。

●　私がいまやっている領域というのは、三角関数と双曲線関数の融合域といえるが、ここでは見たこともない公式などがどんどんと出てくる。冒頭の積分式などもふしぎなものばかりである。１９世紀に見つかっていてもおかしくないと思うが、おそらく初出と思っている。

三角関数＆双曲線関数の融合域は、見逃されてきた領域ではなかろうか。

●新種の積分式も大事だが、本当に大事なものは、新しく見つけた深フーリエ級数である。

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot\cdot=(1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sha}}\right) \qquad \text{-----[5]}$$

$$(0\le x\le 2\pi,\ a>0)$$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot\cdot=(1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sha}}\right) \qquad \text{-----[6]}$$

$$(-\pi\le x\le \pi,\ a>0)$$

［6］からの L(2)積分式の[D2]が得られ、［5］から Z(2)積分式の[C4]が得られる。 面白いのは、［5］と［6］は本質的に同値であるということである。それは変数変換で簡単に確かめられる。

同値である［5］と［6］から、Z(2)と L(2)の積分式が得られるのであるから、まったく面白い。

●上記の新しい深フーリエ級数［5］から、新種の恒等式（次の上側の式）が得られた。

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{sh}5\mathrm{a}}-\frac{1}{7\mathrm{sh}7\mathrm{a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3\mathrm{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5\mathrm{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7\mathrm{a}}\right)+\cdot\cdot$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{cha}}-\frac{1}{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{ch}5\mathrm{a}}-\frac{1}{7\mathrm{ch}7\mathrm{a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3\mathrm{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5\mathrm{a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7\mathrm{a}}\right)+-\cdot\cdot$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

左辺はゼータの香りが漂っていて優美な姿をしている。

これらは、この１年やってきた恒等式シリーズの系譜に属するものだが、新種の恒等式である。上側の式は、深フーリエ級数［5］を使って複雑な過程を経て得られた（証明済み）。下側の式は、円環の原理のヒントから得た（未証明。数値検証で OK）。

● じつは[5]や［6］は半年間探していたフーリエ級数であった。求まらずに苦しんでいたが、あることがきっかけで、難関だった積分が実行でき（不定積分がみつかり）、今回得ることができた。

いったんそれらが得られると、新種の積分式や恒等式が出るし、また別の未証明だった恒等式の証明もできるしで（これはいつか）、その意味で深フーリエ級数は重要であり地下の根っことなっている。

数学は、あることがわかるとばたばたと結果が得られることがよくある。やはり数学は芋堀りに似ている。根っこをひっぱると、つぎつぎに芋が連なって出てくる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023. 10. 29　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ｉ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）