＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２８＞ rev1.01

--- 新種の積分の導出（その３） ---

新種と考えられる積分式を見出したので報告したい。以下の[B3]である。前回までの分につけ加える形で示した。

これまでと式を示す記号を若干変えたので注意しておく（例えば、B-1を[B1]などと変えた）。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=$現代でもよくわからない

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的に$\zeta(s)$そのものである。

また双曲線関数sinh, coshはそれぞれsh, chと略記した。例えば、ch2xはcosh(2x)のことである。
logは自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[A1]}$$

$$\log 2=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A2]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{------[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{------[B2]}$$

$$\pi=\int_0^\infty(1/A)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin A}{\mathrm{ch}x-\sin A}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$

（Aは$0<|A|\le\pi/2$を満たす任意の実数。$A\to 0$でも式は成立。）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\pi^2/6=\int_0^\infty\left\{x-\log\bigl(2(\mathrm{ch}x-\cos x)\bigr)\right\}dx \qquad \text{------[C1]}$$

$$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^\infty\left\{\log\bigl(2(\mathrm{ch}x+\cos x)\bigr)-x\right\}dx \quad \text{----[C2]}$$

$$Z(2)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdot\cdot=\pi^2/8=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{\mathrm{ch}x-\cos x}\right)dx \quad \text{------[C3]}$$

$$L(2)=0.91596559\cdot\cdot=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \quad \text{------[D]}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は[B3]を得た。これも$\int_0^\infty \sim$ の形の新種の積分式と考えられる。

まず[B1]～[B3]を並べてみよう。

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \quad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \quad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^\infty(1/A)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin A}{\mathrm{ch}x-\sin A}\right)dx \quad \text{-----[B3]}$$

（A は $0<|A|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $A\to0$ でも式は成立。）

[B1]、[B2]は素晴らしく、ふしぎな形の式である。一方、[B3]は形容しがたい感じが出ていて、異様なものを感じる。[B3]はπ/4＝・・として他三式とそろえてもよいが、形を重視してπ＝・・とした。

なお、上記＜見出した積分式＞の全式は、Wolfram Alpha という積分計算アプリで数値検証を行っており、式の正しさは確認済みである。

さて、[B3]の導出方法（証明）を示したい。
ただし、その前にこれまでに示したフーリエ級数と「変数定数倍-積分定理」とを再掲しておく。
“深フーリエ級数”も＜フーリエ級数＞の式から導いたものだが、一段階深みをおびているので“深～”と付けた。そして[B3]の導出に、これらが関係する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ フーリエ級数 ＞

$$\frac{\sin x}{e^a}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot=\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \quad \text{----------①}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$$

$$\frac{\cos x}{e^a}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot\ =-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)}$$ ------------②

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^a}-\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}-\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)}$$ -----------③

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^a}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)}$$ ------------④

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^a}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}$$ ------------⑤

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^a}-\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}$$ ----------⑥

$(0 \le x \le \pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^a}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot \mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}$$ ------------⑦

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^a}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}$$ ----------⑧

$(-\pi \le x \le \pi,\ a>0)$

＜ 深フーリエ級数 ＞

$$\frac{\cos x}{1e^a}-\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =(1/2)\{-a+\log(2(\mathrm{ch}a+\mathrm{c}x))\}$$ -----[1]

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$

$$\frac{\cos x}{1e^a}+\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+\cdot\cdot\ =(1/2)\{a-\log(2(\mathrm{ch}a-\mathrm{c}x))\}$$ -----[2]

$(-\pi \le x \le \pi,\ a \ge 0)$

$$\frac{\cos x}{1e^a}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot\ =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos x}{\mathrm{ch}a-\cos x}\right)$$ -----[3]

$(-\pi \le x \le \pi,\ a \ge 0)$

$$\frac{\sin x}{1e^{a}}-\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot \quad =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right) \qquad \text{----[4]}$$

$$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$$

==================================

＜変数定数倍−積分定理＞

任意の実関数 F(x) に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty} F(cx)dx=(1/c)\int_0^{\infty} F(x)dx$$

以上。

上記定理はこちらで証明したものだが、変数定数倍−積分定理という名前はまだつけていなかった。

さて、以下で、次の[B3]の導出方法(証明)を示す。

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/A)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin A}{\mathrm{ch}x-\sin A}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

(A は $0<|A|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $A\to 0$ でも式は成立。)

===================================

＜ [B3]の導出(証明)＞

深フーリエ級数の[４]を使う。

$$\frac{\sin x}{1e^{a}}-\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot \quad =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right) \qquad \text{----[4]}$$

$$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$$

上式を 0～∞の範囲で a について積分する。

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{1e^{a}}-\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot\right)da=\int_0^{\infty}(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right)da$$

$$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$$

［４］左辺の第 n 項までの和を Sn とすると、Sn は n−>∞では［４］右辺に一様収束するから、上式の左辺は項別積分が可能となり、次式が成り立つ。

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{1e^{a}}da-\int_0^{\infty}\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}da+\int_0^{\infty}\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}da-\int_0^{\infty}\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}da+-\cdot\cdot=\int_0^{\infty}(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right)da$$

両辺をすこし整理しよう。

$$\left(\frac{\sin x}{1}\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{a}}da-\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{3a}}da+\left(\frac{\sin 5x}{5}\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{5a}}da-\left(\frac{\sin 7x}{7}\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{7a}}da+-\cdot\cdot$$

$$=(1/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin x}{\mathrm{cha}-\sin x}\right)\mathrm{da}$$

ここで、左辺の各積分に対し、変数定数倍-積分定理を適用すると、次となる。

$$\left(\frac{\sin x}{1^2}\right)\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}-\left(\frac{\sin 3x}{3^2}\right)\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}+\left(\frac{\sin 5x}{5^2}\right)\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}-\left(\frac{\sin 7x}{7^2}\right)\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}+-\cdot\cdot$$

$$=(1/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin x}{\mathrm{cha}-\sin x}\right)\mathrm{da}$$

左辺は$\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}$ がくくりだせるようになったので、上式は次のようになる。

$$\left(\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\frac{\sin 7x}{7^2}+-\cdot\cdot\right)\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}=(1/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin x}{\mathrm{cha}-\sin x}\right)\mathrm{da} \quad \text{----(1)}$$

左辺は、公式集にある次のフーリエ級数の左辺と同じであると気づく。

$$\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\frac{\sin 7x}{7^2}+-\cdot\cdot=\pi x/4 \quad \text{---(2)}$$

$$(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$$

（２）を（１）に代入して（１）は次となる。

$$(\pi x/4)\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}=(1/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin x}{\mathrm{cha}-\sin x}\right)\mathrm{da}$$

$\int_0^\infty \frac{1}{e^a}\mathrm{da}$は簡単に計算できてそれは 1 となるから、上式は次のように簡単になる。

$$\pi x/4=(1/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin x}{\mathrm{cha}-\sin x}\right)\mathrm{da}$$

さらに形を整えて、次を得る。

$$\pi=\int_0^\infty (1/x)\log\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin x}{\mathrm{cha}-\sin x}\right)\mathrm{da}$$

本質は同じだが、aをAに置き換えておこう。

$$\pi=\int_0^\infty (1/x)\log\left(\frac{\mathrm{chA}+\sin x}{\mathrm{chA}-\sin x}\right)\mathrm{dA}$$

さらにAをxに、xをAに置き換えても本質は変わらず、さらにわかりやすくなるのでそうすると、次となる。

$$\pi=\int_0^\infty (1/A)\log\left(\frac{\mathrm{chx}+\sin A}{\mathrm{chx}-\sin A}\right)\mathrm{dx}$$

これは目標の[B3]そのものである。このようにして[B3]に到達した。
終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして[B3]が得られた。まったく簡単な証明である。
ポイントは、深フーリエ級数[4]を使い、a についての積分に変数定数倍−積分定理を使ったことにある。

もう一度[B1]～[B3]をながめよう。
****

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/A)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin A}{\mathrm{ch}x-\sin A}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$

（A は $0<|A|\leq\pi/2$ を満たす任意の実数。 $A\to 0$ でも式は成立。）
****

[B1]と[B2]はやはりすばらしい。簡潔でふしぎな式である。
[B3]は、条件を満たすどんな実数 A を代入してもπが得られることを示している。証明はできても、どうしてこうなるのか？そのカラクリはわからない。[B3]は異様な式、奇妙な式といいたくなる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● [B1]、[B2]の方が[B3]よりも深いところからきているような気がする。

それは、[B1]の証明は先日こちらで示したが（そのときは B−1 と表現していた）、今回の[B3]の証明に比べて、もっと高度なことをやっている。私も最初はそれほど意識していなかったが、証明の冒頭で次のように述べているのは、じつにたいへんな作業をごく簡単に表現しているのである。

＜こちらの B−1（つまり[B1]）の証明から＞
＝＝＝＝＝＝＝
⑥で、a がたまたま x に一致する場合（地点 x＝a）を考える。a が x と一致する x でもたしかに⑥式は成り立っている。x が 0～∞の範囲（x＞0 の）の全ての各実数点 x において a が x と一致する点を拾い続け、その拾っていった点をすべてつないで構成される次式は、当然成り立つ（これは x=0 でも成り立つ）。
＝＝＝＝＝＝＝

すなわち、ものすごく密度の濃い無限に時間のかかるややこしい作業を３行に圧縮して書いている。
任意に変わるａの無限個の中から１点を選び、今度はｘ横軸で無限回同じことを行い続けるという∞×∞の作業を３行に圧縮している。精密に書くとたいへんなことを簡潔に表したのである。

そういうこともあり、地下の奥深い地点から来ているのが[B1]であり[B2]であると思う。

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----[B2]}$$

●さらに、証明の折にはあまり意識していなかったが、上記の[B1]証明の折に取り出した次式も地下にうもれていた大事なものと思う。

$$\frac{\sin x}{e^{x}}-\frac{\sin 3x}{e^{3x}}+\frac{\sin 5x}{e^{5x}}-\frac{\sin 7x}{e^{7x}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x} \qquad \text{---------⑥-2}$$

$$(0\leq x)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.10.21　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ｉ」､「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

2023.10.23　rev1.01　新種の積分ではなかった[A3]、[B3]とその関連記述を削除した。そして元の[B4]を[B3]に変えた。