＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２７＞ rev1.02

--- 新種の積分の導出（その２） ---

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.10.23 追記

B-3 は、新種の積分ではありませんでした。申し訳ありませんが、そのように訂正します。

B-3 は、“(1/2)$\tan^{-1}$(sinhx/cosA)+定数”という不定積分が存在し、よって自明的にπ/4 が計算できてしまいます。式自体は間違っていないので、記述はそのままにしておきますが、「新種の積分ではない」という観点で以下本稿をご覧ください。＜双曲線ゼータとその派生式 その28＞以降では、B-3 の式は無くし、[B3]として別の式で上書きしていきます。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

新種と考えられる積分式を見出したので報告したい。以下の B-3 である。前回分に加える形で一緒に示した。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1 -1/3 +1/5 -1/7 +-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2 +-\cdots=$ 現代でもよくわからない

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1 +1/3^2 +1/5^2 +1/7^2 +\cdots=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1 +1/3^s +1/5^s +1/7^s +\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、ch2x は cosh(2x)のことである。
log は自然対数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{----A-1}$$

$$\log 2=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{----A-2}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-1}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-2}$$

$$\pi/4=\int_0^\infty\left(\frac{\cos A\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2A}\right)dx \quad (A\text{は}-\pi/2<A<\pi/2\text{を満たす任意の実数}) \qquad \text{---B-3}$$

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=\int_0^\infty\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \quad \text{----C-1}$$

$$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^\infty\{\log(2(\mathrm{ch}x+\cos x))-x\}dx \quad \text{---C-2}$$

$$Z(2)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdot\cdot=\pi^2/8=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{\mathrm{ch}x-\cos x}\right)dx \quad \text{-----C-3}$$

$$L(2)=0.91596559\cdot\cdot=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \quad \text{-----D}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は B-3 を得た。これも$\int_0^\infty$ 〜 の形の新種の積分式と考えられる。

B-3 を得たとき、ちょっと異様な式と思った。$-\pi/2<A<\pi/2$を満たす任意の実数 A を代入してπ/4 が出るのである！

B-1, B-2 と B-3 を並べてみよう。

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \quad \text{----B-1}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \quad \text{----B-2}$$

$$\pi/4=\int_0^\infty\left(\frac{\cos A\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2A}\right)dx \quad (A\text{ は }-\pi/2<A<\pi/2\text{ を満たす任意の実数}) \quad \text{---B-3}$$

これらを比較したい。

B-3 は、L(1)の系譜から出たわけではないので L(1)を記していないが、三式は左辺がπ/4 で一致している。

B-1、B-2 は文句なく素晴らしい。一方、B-3 は形容しがたい感じが出ていて不気味なものを感じる。

なお、上記＜見出した積分式＞の全式は、Wolfram Alpha という積分計算アプリで数値検証を行っており、式の正しさは検証済みである。

B-3 の導出方法（証明）を示す前に、前々回に提示したフーリエ級数と「変数定数倍-積分定理」とを再掲しておく。B-3 の導出にやはりこれらが関係する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ フーリエ級数 ＞

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \qquad \text{----------①}$$

$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot\ =-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \qquad \text{----------②}$$

$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}-\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \qquad \text{----------③}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \qquad \text{----------④}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \qquad \text{----------⑤}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{----------⑥}$$

$(0\leq x\leq\pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \qquad \text{----------⑦}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{----------⑧}$$

$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$

＜ 深フーリエ級数 ＞

$$\frac{\cos x}{1e^{a}}-\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =(1/2)\{-a+\log(2(\mathrm{ch}a+cx))\} \qquad \text{----[1]}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a\geq 0)$

$$\frac{\cos x}{1e^{a}}+\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+\cdot\cdot\ =(1/2)\{a-\log(2(\mathrm{ch}a-cx))\} \qquad \text{----[2]}$$

$$(-\pi \leq x \leq \pi,\ a \geq 0)$$

$$\frac{\cos x}{1e^{a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot\ =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos x}{\mathrm{ch}a-\cos x}\right) \quad \text{----[3]}$$

$$(-\pi \leq x \leq \pi,\ a \geq 0)$$

$$\frac{\sin x}{1e^{a}}-\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right) \quad \text{----[4]}$$

$$(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ a \geq 0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜変数定数倍−積分定理＞

任意の実関数Ｆ(x)に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここでｃは、c>0 の実定数である。

$$\int_0^\infty F(cx)dx=(1/c)\int_0^\infty F(x)dx$$

以上。

前々回では①、②の既知のフーリエ級数から導いた③～⑧と[1]～[4]のフーリエ級数を提示し、さらに前々回に作った「変数定数倍−積分定理」（証明は前々回を参照）を示したのであった。

さて、以下で今回出した次の B−3 の導出方法(証明)を示す。

$$\pi/4=\int_0^\infty\left(\frac{\cos A\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2A}\right)dx \quad (\text{A は}-\pi/2<A<\pi/2\ \text{を満たす任意の実数}) \quad \text{---B−3}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ B−3 の導出(証明)＞

ここ１年、双曲線ゼータとその派生式で様々な恒等式を見出してきたが、その導出に際して、第一系列から第六系列までの基本式を導き、それらを用いて恒等式を得てきた。

今回の積分式の証明においても、その基本式を利用するが、今回の場合は第六系列の次の基本式を使う（「第六系列・cos 版・一番式」という名称で私が用いているもの）。それを[基本式1]とした。

$$\frac{\cos x}{e^{a}+1}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}+1}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2x}+-\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式1]}$$

$$(-\pi \leq x \leq \pi,\ a > 0)$$

この基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を用いて導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形と類似の方法である。

⇒ファン・ネス彗星　その１（biglobe.ne.jp）

なお[基本式 1]の導出において、次のフーリエ級数（上方の⑧）を活用した。

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{---------⑧}$$

$$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$$

さて、[基本式 1]の両辺を 0～∞の範囲で a について積分する。

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x}{e^{a}+1}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}+1}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}+1}+-\cdot\cdot\right)da$$

$$=\int_0^{\infty}\cos x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2x}+-\cdot\cdot\right\}da \qquad \text{----(1)}$$

$$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$$

[基本式 1]の左辺の第 n 項までの和を Sn とすると、n->∞で Sn がある関数に一様収束することは明らかである。また右辺においてもそれは同様である。よって上式(1)のどちらの辺も項別積分ができ、次のようになる。

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{e^{a}+1}da-\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}da+\int_0^{\infty}\frac{\cos 5x}{e^{5a}+1}da-\int_0^{\infty}\frac{\cos 7x}{e^{7a}+1}da+-\cdot\cdot$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}\right)da-\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2x}\right)da+\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}\right)da-+\cdot\cdot$$

上式に対し、変数定数倍-積分定理を適用すると、次のようになる。

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{e^{a}+1}da-(1/3)\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x}{e^{a}+1}da+(1/5)\int_0^{\infty}\frac{\cos 5x}{e^{a}+1}da-(1/7)\int_0^{\infty}\frac{\cos 7x}{e^{a}+1}da+-\cdot\cdot$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}\right)da-(1/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}\right)da+(1/3)\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}\right)da-+\cdot\cdot$$

整理して次式を得る。(右辺では 1-1/2+1/3-1/4+-・・＝log2 を用いた。)

$$\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 7x}{7}+-\cdot\cdot\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{a}+1}da=\cos x\cdot\log 2\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}\right)da \qquad \text{---(2)}$$

ここで左辺の$\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{a}+1}da$ は変数変換で簡単に計算できて $\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{a}+1}da=\log 2$と求まる。

よって上記（2）の両辺から log2 が消えて、(2）は次のようにさらに簡単になる。

$$\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 7x}{7}+-\cdot\cdot=\cos x\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}\right)da \quad \text{----(3)}$$

上式の左辺は、公式集にある次のフーリエ級数の左辺と同じである。

$$\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 7x}{7}+-\cdot\cdot=\pi/4 \qquad \text{----(4)}$$

$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

(4) と (3) から、次式が得られる。

$$\pi/4=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}\right)da$$

$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

右辺をよりわかりやすくするため、a と x を逆にして表示すると次となる（本質的には同じこと）。

$$\pi/4=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos a\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2a}\right)dx$$

$$(-\pi/2<a<\pi/2)$$

さらに a を A に変えておこう。

$$\pi/4=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos A\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2A}\right)dx$$

$$(-\pi/2<A<\pi/2)$$

これは目標の B-3 そのものである。このようにして B-3 に到達した。
終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして B-3 が得られた。もう一度三式を比較したい。

****

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-1}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-2}$$

$$\pi/4=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos A\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2A}\right)dx \qquad (A\text{は}-\pi/2<A<\pi/2\text{を満たす任意の実数}) \qquad \text{---B-3}$$

****

繰り返しになるが、B-1 と B-2 は文句なく素晴らしい。簡潔で美しく、そしてふしぎな形である。

B-3 は、$-\pi/2 < A < \pi/2$のどんな実数 A を代入してもπが得られることを示している。証明はできても、どうしてこうなるのか？その真のカラクリはわからない。B-3 は異様な式、奇妙な式といいたくなる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●このシリーズの中で、私は以前次のように述べた。

「数学において、ふしぎな式と異様は式はきわめて価値が高い。美しい式はそれなりに価値が高い。」

この考えはまったく変わっていない。だから私はいつもふしぎな式をさがしている。そしてそんな式が見つかれば、とてもうれしいし感動が長く続く。冒頭の式たちはそんな式である。

● 証明のキーとなっているのは、基本式（今回は[基本式 1]）と変数定数倍−積分定理の二つだが、基本式は上方でのフーリエ級数①～⑧を使って出るので、これらフーリエ級数が決定的な役割を果たしている。そのフーリエ級数は、変数 x と定数 a から成るが本質的に二変数と同じであり、だから高い対称性をもち、その対称性からよい結果が湧き上がってくるのだと思う。

あと、変数定数倍−積分定理がなければ、私は決してこれらの積分式を出すことなどできなかった。それを思うと、この定理の役割も大きい。たった３行で証明した簡単な定理だが、簡単なものは強力なのではなかろうか。

数学者の黒川氏は雑誌「数学のたのしみ」で、シューアの補題の説明において「キーはたいてい簡単なのだ」と述べていたが、それが印象に残っている。

キーはたいてい簡単なのだ　　黒川信重

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.10.15　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

Rev1.01　2023.10.16　　証明の一部を修正。説明文の一文を削除。

Rev1.02　2023.10.23　　B-3 が新種の積分でなかった事実を冒頭に追記。