# ＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２６＞

--- 新種の積分の導出 ---

新種と考えられる積分式を見出したので報告したい。以下の＜見出した積分式＞の八式である。

なお、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=$現代でもよくわからない

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

また双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2x は sinh(2x)のことである。
log は自然対数である。

====================================

## ＜ 見出した積分式 ＞

$$\log 2=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{----A-1}$$

$$\log 2=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{----A-2}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-1}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^\infty\left(\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-2}$$

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\pi^2/6=\int_0^\infty\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \qquad \text{----C}$$

$$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdots=\pi^2/12=\int_0^\infty\{\log(2(\mathrm{ch}x+\cos x))-x\}dx \qquad \text{----D}$$

$$Z(2)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\pi^2/8=(1/2)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{\mathrm{ch}x-\cos x}\right)dx \qquad \text{-----E}$$

$$L(2)=0.91596559\cdot\cdot=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \qquad \text{-----F}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回、この八つを見出した。どの式も見たことがないふしぎな積分となっていて、得たときは「こんな式があるのか！」と思った。どれもすばらしい形をしており、宝石のように見える。左辺はゼータを出しているが、ゼータなどより、これらはπやπ²や log2 を表す新しい積分式と見るべきである。

これらは古典的な感じの式であり既に得られていてもおかしくないが、公式集にないし、数学仲間に聞いても「見たことがない」とのことなので、新種にちがいない。発見した瞬間に「新種の積分だ」と思ったが、勘違いをよくするので、いろいろ聞いた。

さて、これらの導出方法（証明）であるが、簡単にいうと前回出したフーリエ級数と前回作った定理から出た。その定理を「変数定数倍−積分定理」と名付ける。それらフーリエ級数とその定理を再掲しよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot=\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \qquad \text{------------①}$$

$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot=-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \qquad \text{------------②}$$

$(-\pi\leq x\leq\pi,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}-\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot=\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \qquad \text{-----------③}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \qquad \text{------------④}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot=\frac{\sin x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \qquad \text{------------⑤}$$

$(-\pi/2\leq x\leq\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot=\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{----------⑥}$$

$(0\leq x\leq\pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot=\frac{\cos x\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \qquad \text{------------⑦}$$

$$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a > 0)$$

$$\frac{\cos x}{e^{a}} - \frac{\cos 3x}{e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{e^{5a}} - \frac{\cos 7x}{e^{7a}} + - \cdot \cdot = \frac{\cos x \cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a + \cos 2x} \qquad \text{---------⑧}$$

$$(-\pi \le x \le \pi,\ a > 0)$$

＜ 深フーリエ級数 ＞

$$\frac{\cos x}{1e^{a}} - \frac{\cos 2x}{2e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} - \frac{\cos 4x}{4e^{4a}} + - \cdot \cdot = (1/2)\{-a + \log(2(\mathrm{ch}a + \mathrm{c}x))\} \qquad \text{----[1]}$$

$$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$$

$$\frac{\cos x}{1e^{a}} + \frac{\cos 2x}{2e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 4x}{4e^{4a}} + \cdot \cdot = (1/2)\{a - \log(2(\mathrm{ch}a - \mathrm{c}x))\} \qquad \text{----[2]}$$

$$(-\pi \le x \le \pi,\ a \ge 0)$$

$$\frac{\cos x}{1e^{a}} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \cdot \cdot = (1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a + \cos x}{\mathrm{ch}a - \cos x}\right) \qquad \text{----[3]}$$

$$(-\pi \le x \le \pi,\ a \ge 0)$$

$$\frac{\sin x}{1e^{a}} - \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{5e^{5a}} - \frac{\sin 7x}{7e^{7a}} + - \cdot \cdot = (1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a + \sin x}{\mathrm{ch}a - \sin x}\right) \qquad \text{----[4]}$$

$$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$$

==================================

## ＜変数定数倍−積分定理＞

任意の実関数 F(x)に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty} F(cx)dx = (1/c)\int_0^{\infty} F(x)dx$$

以上。

前回は上記定理を見出し（証明は前回を参照)、そして公式集にある既知の上記①、②から導出した③～⑧と[1]～[4]のフーリエ級数を見たのであった。

さて、今回は B−1 のみを導出(証明)しておくことにする。他は略。

$$L(1) = \pi/4 = 2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x \cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x + \cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-1}$$

====================================

＜ B-1 の導出（証明）＞

⑥のフーリエ級数に着目する。

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{---------⑥}$$

$(0\leq x\leq\pi,\ a>0)$

⑥で、<u>a がたまたま x に一致する場合（地点 x＝a）</u>を考える。a が x と一致する x でもたしかに⑥式は成り立っている。x が 0～∞の範囲（x＞0 の）の<u>全ての各実数点 x</u> において a が x と一致する点を拾い続け、その拾っていった点をすべてつないで構成される次式は、当然成り立つ（これは x＝0 でも成り立つ）。

$$\frac{\sin x}{e^{x}}-\frac{\sin 3x}{e^{3x}}+\frac{\sin 5x}{e^{5x}}-\frac{\sin 7x}{e^{7x}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x} \qquad \text{---------⑥-2}$$

$(0\leq x)$

⑥は周期関数のフーリエ級数となっているが、上式⑥-2 はもはや周期関数でないのは言うまでもない。

上式の両辺に対し、0～∞の範囲で積分を行うと、次となる。

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{e^{x}}-\frac{\sin 3x}{e^{3x}}+\frac{\sin 5x}{e^{5x}}-\frac{\sin 7x}{e^{7x}}+-\cdot\cdot\ \right)dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-----⑥-3}$$

⑥-2 左辺の第 n 項までの和を Sn とすると、Sn は n->∞では⑥-2 右辺に一様収束するから、上式⑥-3 の左辺は項別積分が可能となり、次式が成り立つ。

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^{x}}dx-\int_0^{\infty}\frac{\sin 3x}{e^{3x}}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin 5x}{e^{5x}}dx-\int_0^{\infty}\frac{\sin 7x}{e^{7x}}dx+-\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx$$

上式に<u>変数定数倍-積分定理</u>を適用すると、次のようになる。

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^{x}}dx-(1/3)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^{x}}dx+(1/5)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^{x}}dx-(1/7)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^{x}}dx+-\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx$$

左辺を整理して、次式を得る。

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^{x}}dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{-------⑥-4}$$

ここで、$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot=L(1)=\pi/4$、$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^{x}}dx=1/2$　であるから、⑥-4 は次のようになる。

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-1}$$

このようにして B−1 に到達した。
終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

B−1 はこのようにして得られた。他の式も同様の方法で得られる。

前回、変数定数倍−積分定理を見つけたとき、私はその定理に“よい性質”を感じ、面白い応用がありそうな気がした。
何度かトライして失敗し、その後、前回得たフーリエ級数に定理を適応すると、面白い積分式が得られることがわかり、上記証明を得た。
この証明は簡明としかいいようがない。そして一つ証明ができれば、その類似を遂行することにより、次々と同類の式が得られていく。冒頭の積分式はこのようにして得られた。

冒頭の式を再掲しよう。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

## ＜ 見出した積分 ＞

$$\log 2=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)dx \qquad \text{----A-1}$$

$$\log 2=\int_0^{\infty}\left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{----A-2}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-1}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x+\cos 2x}\right)dx \qquad \text{----B-2}$$

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=\int_0^{\infty}\{x-\log(2(\mathrm{ch}x-\cos x))\}dx \qquad \text{----C}$$

$$(1/2)\zeta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^{\infty}\{\log\big(2(\mathrm{ch}x+\cos x)\big)-x\}dx \qquad \text{----D}$$

$$Z(2)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdot\cdot=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos x}{\mathrm{ch}x-\cos x}\right)dx \qquad \text{-----E}$$

$$L(2)=0.91596559\cdot\cdot=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chx}+\mathrm{sinx}}{\mathrm{chx}-\mathrm{sinx}}\right)dx \qquad \text{-----F}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらは何度眺めてもよいものである。そのふしぎさ、簡明さに感嘆する。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回みつけた積分式は、三角関数＆双曲線関数の融合域が作り出す高い対称性の泉から来ているような気がする。それは、ここ２年ほどでいつも感じてきたことである。

今回、変数定数倍-積分定理から、積分式の新しい領域に足を踏みいれた感じがある。それはある洞窟を進んでいて、横にぽっかりとあいた別の洞窟を見つけたのと同じである。

紹介した式以外にも珍しい形の積分式がいろいろ出てきていて、洞窟は深そうである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.10.11　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）