＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２５＞

このシリーズでは新種の恒等式が出るたびにそれを示してきたが、それを可能にしたのは基本式（母等式）の存在であった。その基本式を出すには、あるフーリエ級数が必要となる。それは公式集にあるフーリエ級数（下方①と②）と、それから導いたフーリエ級数たち（③～⑧）である。

さらに、それらから導いたフーリエ級数（深フーリエ級数と名付けた[１]～[４]）からゼータの特殊値に関する面白い積分式が出たので紹介したい。また、ある定理を得たので最後の所でそれも報告した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot=\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \quad \text{-----------①}$$

$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot=-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)} \quad \text{-----------②}$$

$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}-\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot=\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \quad \text{-----------③}$$

$(-\pi/2\le x\le\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)} \quad \text{-----------④}$$

$(-\pi/2\le x\le\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot=\frac{\sin x\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \quad \text{-----------⑤}$$

$(-\pi/2\le x\le\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot=\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \quad \text{-----------⑥}$$

$(0\le x\le\pi,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot=\frac{\cos x\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x} \quad \text{-----------⑦}$$

$(-\pi/2\le x\le\pi/2,\ a>0)$

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot=\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x} \qquad \text{-----------⑧}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a > 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 深フーリエ級数 ＞

$$\frac{\cos x}{1e^{a}}-\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}-\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+-\cdot\cdot=(1/2)\{-a+\log(2(\mathrm{ch}a+\mathrm{c}x))\} \qquad \text{-----[1]}$$

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$

$$\frac{\cos x}{1e^{a}}+\frac{\cos 2x}{2e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{4e^{4a}}+\cdot\cdot=(1/2)\{a-\log(2(\mathrm{ch}a-\mathrm{c}x))\} \qquad \text{-----[2]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a \ge 0)$

$$\frac{\cos x}{1e^{a}}+\frac{\cos 3x}{3e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{5e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot=(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos x}{\mathrm{ch}a-\cos x}\right) \qquad \text{-----[3]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a \ge 0)$

$$\frac{\sin x}{1e^{a}}-\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}-\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+-\cdot\cdot=(1/4)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right) \qquad \text{-----[4]}$$

$(-\pi/2 \le x \le \pi/2,\ a \ge 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

③以降を、公式集にある①、②から導いた。③～⑧の導出は簡単である。［１］～［４］はすこしデリケートな計算もあるが、以下のようにして得た。

［１］は、④を a について積分すれば出る。
［２］は、②を a について積分すれば出る。
［３］は、［１］と［２］の足し算で出る。
［４］は、［３］の変数変換（X＝π/2−x）で出る。

以上。

［１］～［４］については深いなにかを感じ、“深フーリエ級数”と名付けた。

ここまでの結果を使って計算していくと、ゼータ L(s) やζ(s) の特殊値 L(1)、L(2)、ζ(2) が、次の積分値として求まった。

$$L(1)=(1/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{-----A}$$

$$L(2)=(1/4)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)dx \qquad \text{-----B}$$

$$Z(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{ch(x/2)}{sh(x/2)}\right)dx \quad ----C$$

ここで、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4 -------------------(1)

L(2)＝1 −1/3^2 +1/5^2 −1/7^2 +−・・＝現代でもよくわからない ------(2)

Z(2)＝(3/4)ζ(2)＝1 +1/3^2 +1/5^2 +1/7^2 +・・＝π^2/8 ----------(3)

Z(s)は、私が独自に使っているもので、Z(s)＝1 +1/3^s +1/5^s +1/7^s +・・＝(1−1/2^s)ζ(s)であり、本質的にζ(s)そのものである。

このようにゼータ特殊値が定積分の形で求まった。Ａ，Ｂ，Ｃの右辺は興味ある形をしている。ＡとＣは、(1)と(3)から、次のようにπやπ^{2}が積分で表示されたものといえる。

$$\pi/4=(1/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{chx}\right)dx \quad ---A$$

$$\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{ch(x/2)}{sh(x/2)}\right)dx \quad ----C$$

これらは公式集に出ているはずと思い、調べるとやはり出ていた。「数学公式Ｉ」（岩波書店）の p. 235〜p. 236 に出ている。公式集ではもっと一般的な形（以下のＡ１、Ａ２）で出ており、ＡはＡ１の特殊ケースである(a=2, 下方の定理参照)。一方、Ｃは本質的にＡ２そのものである。なお、Ｃの log の（ ）内は coth(x/2)としても同じである。

$$\pi/(2a)=\int_0^{\infty}\mathrm{sech}\,(ax)\,dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{e^{ax}+e^{-ax}}\right)dx \quad ----A1$$

(a＞0)

$$-\pi^2/8=\int_0^{\infty}\log\,(\tanh x)dx \quad ------------A2$$

このような結果が初等的に得られたのは面白いことである。

さて、Ａで変数変換を行うと、簡単にπ/4 が出るとわかった。公式集の上記Ａ１についても最初深いように見えたが、下方の定理を組み合わせると、割合簡単に証明できる。Ａ１は深くない。Ａ２は深いと思う。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● Ｂは、以下のサイト中での④として１５年前にも出していた(2008/9/26)。

トリトン彗星　その７ (biglobe.ne.jp)

L(2)＝(1/4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)dx$ ----B

L(2)＝(2/π) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi/4)\log(\tan x + 1/\cos x)dx$ ----④

当時はこの④のようなへんてこな形で書いているが、意図があってπを残している。④とＢはじつは同値である。同値であるが、Ｂの方がきれいである。

● Ｃが出る前の状態の式がなんとも味わいのある式となっているのだが、次のＤがそれである。

$$\frac{1-e^{-a}}{1^2}+\frac{1-e^{-3a}}{3^2}+\frac{1-e^{-5a}}{5^2}+\frac{1-e^{-7a}}{7^2}+\cdots = (1/2)\int_0^{a}\log\left(\frac{\mathrm{ch}(a/2)}{\mathrm{sh}(a/2)}\right)da \quad \text{----D}$$

じんじんとなにかを感じさせてくれる式である。a を∞にすると、次のＣになるとわかったときは、感動した。（最後に a を x に変えた）

$$\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}\right)dx \quad \text{----C}$$

● 上記Ｃは、数学者は複素関数論を使って出しているかもしれない。初等的に出ない気がする。$\pi^2/8$ に手計算で到達できそうにない。

それにしてもＣがＤを経由して初等的に出たというのは意義深い。

● 積分をやっていて、ある規則に気づいた。次のような積分範囲が 0～∞の積分に関しては、次の定理が成り立っている。

$$\int_0^{\infty} F(x)dx$$

＜定理＞

任意の実関数Ｆ(x)に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c＞0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty} F(cx)dx = (1/c)\int_0^{\infty} F(x)dx$$

［証明］

　左辺に対し cx＝t と変数変換すると、x の積分範囲が 0〜∞であるから、t の積分範囲も 0〜∞となる。そして cdx＝dt であり、よって左辺は結局、$(1/c)\int_0^{\infty} F(t)dt$　となる。t を x に置き換えても同じだから、たしかに定理は成り立っている。

　終わり。

● この定理からもわかる通り、ＣとＡ２は同値である。私はＣを出したのだが、公式集のＡ２を見て「Ｃは正しい！」と安心した次第である。

$$\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}\right)dx \quad \text{----C}$$

$$-\pi^2/8=\int_0^{\infty}\log(\tanh x)dx \quad \text{----A2}$$

● じつは定理は、偶然のある出来事から気づいた。私はまず上方で示した通り、

$$L(1)=\pi/4=(1/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)dx \quad \text{---A}$$

を出した。

　しかし公式集の公式Ａ１からは a＝2 として

$$\pi/4=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2x}\right)dx$$

となったので、「あれ？計算ミスをしたか？！」と思ったが、すぐに同値と分かった。すなわち次の通り。

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2x}\right)dx \;=\; (1/2)\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)dx$$

　そして、このことは任意の関数で一般化できると気づき、上記の定理とした。定理はこんな偶然がきっかけで生まれたのであった。

●数学の結果というのは、偶然に得られることが多い。これは、数学に限らず、日常のことや仕事でも多くことがそうである。

　だから、数学といっても日常のこととなんら変わりがないといつも感じる。偶然にみつけた洞窟をどんどんと進んでしまうことも多々あり、よって、数学の探求は地下の洞窟を探検しているというイメージと重なる。元の道に引き返すのか、もっと奥に進むのか、そういうところがいつも悩ましい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.9.24　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）