＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２４＞

新種の恒等式を見出したので報告したい。下記の⑮-Ⅱ、Ｃ１、Ｃ２の三つである。⑮は<その１３>で出したものだが、⑮-Ⅱと兄弟分なので一緒に並べた。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{ch2a-ch0}}+\frac{2}{\mathrm{ch3a-cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch4a-ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch5a-ch3a}}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a-cha})^2}+\frac{\mathrm{2sh4a}}{(\mathrm{ch4a-cha})^2}+\frac{\mathrm{3sh6a}}{(\mathrm{ch6a-cha})^2}+\frac{\mathrm{4sh8a}}{(\mathrm{ch8a-cha})^2}+\cdot\cdot \qquad \text{----⑮}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch2a-ch0}}-\frac{2}{\mathrm{ch3a-cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch4a-ch2a}}-\frac{4}{\mathrm{ch5a-ch3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a+cha})^2}+\frac{\mathrm{2sh4a}}{(\mathrm{ch4a+cha})^2}+\frac{\mathrm{3sh6a}}{(\mathrm{ch6a+cha})^2}+\frac{\mathrm{4sh8a}}{(\mathrm{ch8a+cha})^2}+\cdot\cdot \qquad \text{----⑮-Ⅱ}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh2a-sh0}}+\frac{2}{\mathrm{sh3a-sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a-sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh5a-sh3a}}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh10a}}{(\mathrm{ch10a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh14a}}{(\mathrm{ch14a-cha})^2}+\cdot\cdot \qquad \text{----C1}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh2a-sh0}}-\frac{2}{\mathrm{sh3a-sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a-sh2a}}-\frac{4}{\mathrm{sh5a-sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh10a}}{(\mathrm{ch10a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh14a}}{(\mathrm{ch14a+cha})^2}+\cdot\cdot \qquad \text{----C2}$$

$(a\neq 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

⑮-Ⅱ、Ｃ１、Ｃ２を今回証明できた。きれいな秩序から成っている。⑮と⑮-Ⅱは兄弟であり導出も近い。Ｃ１とＣ２も兄弟であり、同じような方法で導出できる。

念のため、Excel でも a にいくつかの値を代入して検証したが、いずれも正しい式であった。

前者の二式に比べ、後者二式は導出過程にひねりが加わっており、前者ほどシンプルな導出ではない。とはいえ、これら四式は導出途上で虚数を用いることで共通しており、例えば<その１３>で見た次のようなものに比べると、より深みのある式になっている（②は、導出で虚数は用いない）。

$$\frac{1}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{1}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{1}{\mathrm{sh^25a}}+\frac{1}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot \qquad \text{----②}$$

$(a>0)$

⑮、⑮-ⅡとＣ１、Ｃ２を比べると、左辺の形は似ているのに右辺の規則性が違っている点が面白い。

以下に⑮-Ⅱの証明の概要を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

⑮-Ⅱの証明の概要

まず第２別種系列の基本式（sin 版）を示す。[基本式]とした。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-1}-\frac{\sin 2x}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-1}-\frac{\sin 4x}{e^{4a}-1}+-\cdot\cdot$$

$$=(\sin x/2)\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}a+\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a+\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\cos x}+\cdot\cdot\right\}\quad\text{---[基本式]}$$

$(-\pi/2\le x\le\pi/2,\ a>0)$

この基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を用いて導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でＡを導いた式変形と類似の方法である。

⇒ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)

なお上記基本式の導出において、公式集に載っているフーリエ級数を元にして導出した次のフーリエ級数を活用した。

$$\frac{\sin x}{e^{a}}-\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}-\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a+\cos x)}$$

$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$

基本式を a で微分して得られた式を変形してき（左辺に sh, ch を出す変形など）、x に ai/2 を代入（i：虚数単位）して整形していき（三角関数を無くすなど）、最後に a を 2a で置き換えると⑮-Ⅱに到達する。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

⑮-Ⅱはこのようにして得られた。⑮も同様の方法で得られる。

Ｃ１とＣ２は、二つの基本式を用いる点が上記証明と違うが、大きな視点では似ている（略）。

四式を再掲しよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}0}+\frac{2}{\mathrm{ch}3a-\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}5a-\mathrm{ch}3a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{2\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{3\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{4\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\cdot\quad\text{----⑮}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch2a-ch0}}-\frac{2}{\mathrm{ch3a-cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch4a-ch2a}}-\frac{4}{\mathrm{ch5a-ch3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a+cha})^2}+\frac{\mathrm{2sh4a}}{(\mathrm{ch4a+cha})^2}+\frac{\mathrm{3sh6a}}{(\mathrm{ch6a+cha})^2}+\frac{\mathrm{4sh8a}}{(\mathrm{ch8a+cha})^2}+\cdot\cdot \qquad \text{----⑮-Ⅱ}$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh2a-sh0}}+\frac{2}{\mathrm{sh3a-sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a-sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh5a-sh3a}}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh10a}}{(\mathrm{ch10a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh14a}}{(\mathrm{ch14a-cha})^2}+\cdot\cdot \qquad \text{----C1}$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh2a-sh0}}-\frac{2}{\mathrm{sh3a-sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a-sh2a}}-\frac{4}{\mathrm{sh5a-sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh10a}}{(\mathrm{ch10a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh14a}}{(\mathrm{ch14a+cha})^2}+\cdot\cdot \qquad \text{----C2}$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらはゼータの香りが漂っている。左辺と右辺の各項の分母で規則性が違っている点が興味深い。左辺と右辺はかけ離れた地点にあるように思え、証明はできても、くみ尽くせないなにかが残るような気がする。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ⑮と⑮-Ⅱはこの二式しか出ていない。Ｃ１とＣ２も二つしか出なかった。
　これまで四つ類似式が出ることが多かったので、それぞれ四つ出るのかと思ったが、二つだけであった。
もしかしたらなにか見落としていて将来「四つ出た！」ということになるのかもしれないが、現時点ではたぶん無理である。

● これまで得た多くの恒等式の証明は、虚数を用いない証明と虚数を（便宜的に）用いる証明の二つに分かれる。どちらの結果も最終は実数世界のふしぎな恒等式になる。ただし後者の方がより深いところからきているような気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.9.16　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）