＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２３＞

新種の恒等式を見出したので報告したい。下記の[ＡⅠ]～[ＡⅣ]である。

ただし、現時点で証明できているのはＡⅠ、ＡⅡの二式のみである。ＡⅢ、ＡⅣは円環の原理から機械的に導いたもので、数値検証で正しさを確認したものである。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh4a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh6a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh^3a}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh^33a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh^35a}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh^37a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----ＡⅠ}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh2a}}-\frac{2^2}{\mathrm{sh4a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh6a}}-\frac{4^2}{\mathrm{sh8a}}+-\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch^3a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch^33a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch^35a}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch^37a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----ＡⅡ}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch2a}}-\frac{2^2}{\mathrm{ch4a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch6a}}-\frac{4^2}{\mathrm{ch8a}}+-\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch^3a}}-\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch^33a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch^35a}}-\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch^37a}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---ＡⅢ}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{2^2}{\mathrm{ch4a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch6a}}+\frac{4^2}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh^3a}}-\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh^33a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh^35a}}-\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh^37a}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---ＡⅣ}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回これら４式を見出した。ゼータの香りが漂っていて、きれいである。

いくら左辺を眺めても右辺のようになる理由がさっぱりわからないふしぎな形をしており、味わいのあるものとなっている。

ＡⅠとＡⅡは証明済みである。

ＡⅢ、ＡⅣは円環の原理から機械的に導いたものであるが、Excel を使い、いくつかの a の値で式の正しさを確認した。

ＡⅠは第一系列と第二系列の基本式から導出される。証明の詳細は複雑なので、以下ＡⅠの証明の概要だけ示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ＡⅠの証明の概要

まず第一系列の基本式(cos 版)を示す。[基本式1]とした。

$$\frac{\cos x}{e^{a}-1}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}-1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sha}{2(cha-\cos x)}\right\}+\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sh2a}{2(ch2a-\cos x)}\right\}+\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sh3a}{2(ch3a-\cos x)}\right\}+\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sh4a}{2(ch4a-\cos x)}\right\}+\cdot\cdot \text{--[基本式1]}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$$

まず第二系列の基本式(cos 版)を示す。[基本式 2]とした。

$$\frac{\cos x}{e^{a}+1}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}+1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sha}{2(cha-\cos x)}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sh2a}{2(ch2a-\cos x)}\right\}+\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sh3a}{2(ch3a-\cos x)}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{sh4a}{2(ch4a-\cos x)}\right\}+-\cdot\cdot \text{--[基本式 2]}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$$

これら基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を用いて導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形（やや特殊な変形）と類似の方法である。⇒ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)

なお上記基本式の導出において、公式集に載っている次のフーリエ級数を活用した。

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot\ =-\frac{1}{2}+\frac{sha}{2(cha-\cos x)}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$$

次に、[基本式１]を両辺 x で微分した式と、[基本式2]を両辺 x で微分した式を辺々足し算した式を作る。その式を sh、ch が出てくるように変形する。そして両辺を sinx で割り、x->0 でロピタルの定理を適用し、さらに変形していくと、ＡＩに到達する。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ＡＩはこのようにして得られた。なお、ＡⅡは第２別種基本式と第３別種基本式から類似の方法で得られる（略）。

ここで円環の原理を復習しよう。それは先に見出した次の規則から成る簡潔な法則である。

****

＜円環の原理＞

双曲線ゼータ関連での恒等式において、ある一つの恒等式Ａに着目する。

その恒等式Ａのある片方の辺に対して強制的に sh と ch を置き換える。つまり、sh ならば ch に、ch ならば sh に置き換える。これを sh-ch 置換と呼ぶ。

次にもう片方の辺に対して強制的に符号だけを変える。その変え方は次のようにする。もし+ばかりの級数（○+○+○+○+・・）ならば交代級数(○−○+○−○+−・・)に変え、もし交代級数(○−○+○−○+−・・)ならば+ばかりの級数（○+○+○+○+・・）に変える。これを符号置換と呼ぶ。

そのようにして機械的に生み出された恒等式は、ふしぎなことに正しい式となる。

上記の規則を行っていくと、いくつかの式を経た所で元の式に戻ってくる。これが円環の原理である。

****

四式を再掲。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^33a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}^35a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}^37a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----ＡⅠ}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+-\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^33a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^35a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^37a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----ＡⅡ}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}-\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}-\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+-\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}-\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^33a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^35a}-\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^37a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---ＡⅢ}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot=(1/2)\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3a}-\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^33a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}^35a}-\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}^37a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---ＡⅣ}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら四式において円環の原理が成り立っていることを見てみよう。

＜ 四式（ＡⅠ, ＡⅡ, ＡⅢ, ＡⅣ）に対して円環の原理を見る ＞

●まずＡⅠに着目する。ＡⅠ右辺に対し sh−ch 置換を行う。するとＡⅡ右辺がそれとなる。ここでＡⅡ左辺を見ると、それはＡⅠ左辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

●次にＡⅡ左辺に対し sh−ch 置換を行う。するとＡⅢ左辺がそれとなる。ここでＡⅢ右辺を見ると、それはＡⅡ右辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

●次にＡⅢ右辺に対し sh−ch 置換を行う。するとＡⅣ右辺がそれとなる。ここでＡⅣ左辺を見ると、それはＡⅢ左辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

●次にＡⅣ左辺に対し sh-ch 置換を行う。するとＡⅠ左辺がそれとなる。ここでＡⅠ右辺を見ると、それはＡⅣ右辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

ここで元のＡⅠに戻った。ＡⅠ⇒ＡⅡ⇒ＡⅢ⇒ＡⅣ⇒ＡⅠとなって、円が閉じた。

以上。

このように円環の原理が成り立っていることがわかる。

上記ではＡⅠからスタートしたが、別にどの式のどの辺からスタートしてもよい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●双曲線ゼータ周辺の畑の土壌は肥沃であり、よって芋の根が広く深くはっている。ある根を引っ張ると、芋が連なって出てくる。

「数学は芋ほりに似ている」とすこし前にいったが、ここはまさに芋が多くとれる地帯である。
この領域に足を踏みいれて１年近くになる。もうかなりの根っこを引いては、芋（恒等式）を得てきたので、もうほとんど残っていないのではないかと思っていたが、今回四つ獲れた。「こんなのが、まだ残っていたのか！」と思った。

● この領域は、基本式の視点からいえば、第一系列から第六系列まで、変種の二つも加えると、八つの系列が存在する。基本式は２変数であり、x での微分（＆積分）や a での微分が自在に行える。さらに、それぞれの系列のみならず、系列同士の足し算などもできる。

そんなことから、系列や変数の種類が多いために、多くの恒等式が出てくることになる。

●得てきた恒等式の多くは証明したが、今回のＡⅢ、ＡⅣなども含めて、いつかの式が証明できずにいる。それは、私には見えていないものがあることを示している。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.9.10　杉岡幹生