＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２２＞

新種の恒等式を見出したので報告したい。下記の[Ａ]と[Ｂ]である。これは、前回見た四つのものと親戚筋にあたる式と考えられる。下記では、比較しやすいように前回の[１]～[４]の次にそれらを並べた。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sha+sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a+sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a+sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a+sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[1]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha-sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a-sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a-sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a-sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[2]}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha+sh0}}+\frac{1}{\mathrm{sh2a+sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a+sh2a}}+\frac{1}{\mathrm{sh4a+sh3a}}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a-cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a-cha}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a-cha}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a-cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[3]}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha-sh0}}+\frac{1}{\mathrm{sh2a-sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a-sh2a}}+\frac{1}{\mathrm{sh4a-sh3a}}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a-cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a-cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a-cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[4]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh2a-sh0}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a-sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh4a-sh2a}}+\frac{1}{\mathrm{sh5a-sh3a}}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch2a-cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a-cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch10a-cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch14a-cha}}+\cdot\cdot \quad \text{----[A]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh2a-sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh3a-sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh4a-sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh5a-sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot \qquad \text{----[B]}$$

$(a>0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最後の[Ａ]と[Ｂ]が今回見出した恒等式である。前回の[１]～[４]と似ていると思われないだろうか。なお秩序を強調するため、sh0 はゼロだが、sh0 のままおいた。

[Ａ]は[４]に似ており、[Ｂ]は[２]に似ている。[Ａ]は、第一系列と第二系列の基本式を組み合わせることで得たものである。また[Ｂ]は、第２別種系列と第３別種系列の基本式を組み合わせることで得たものである。

今回の二式もふしぎな感じがあって眺めるほどに味わいがある。右辺も左辺も面白い形をしている。

なお、[Ａ],[Ｂ]に対し、念のため Excel で a にいくつかの数値を代入して検証も行ったが正しいものであった。

[Ａ]の証明の概要を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[Ａ]の証明の概要

まず第一系列の基本式（sin 版）を示す。[基本式1]とした。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=(\sin x/2)\left\{\frac{1}{\mathrm{cha}-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\cos x}+\cdot\cdot\right\} \qquad \text{---[基本式1]}$$

$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$

まず第二系列の基本式（sin 版）を示す。[基本式 2]とした。

$$\frac{\sin x}{e^{a}+1}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=(\sin x/2)\left\{\frac{1}{\mathrm{cha}-\cos x}-\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}-\cos x}-\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\cos x}+-\cdot\cdot\right\} \qquad \text{---[基本式 2]}$$

$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$

これら基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を用いて導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形（やや特殊な変形）と類似の方法である。⇒ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)

なお上記基本式の導出において、公式集に載っている次のフーリエ級数を活用した。

$$\frac{\sin x}{e^{a}}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$$

次に、[基本式１]と[基本式2]を辺々足し算して変形していくと、次の＜融合式１＞が得られる。

$$\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}+\frac{\sin 2x}{\mathrm{sh}2a}+\frac{\sin 3x}{\mathrm{sh}3a}+\frac{\sin 4x}{\mathrm{sh}4a}+\cdot\cdot$$

$$=\sin x\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a-\cos x}+\cdot\cdot\right\}$$ ---<融合式 1>

$$(-\pi\le x\le\pi,\ a>0)$$

この式の x に ai/2 を代入して(i：虚数単位)、変形していき、最後に a を 2a と置き換えると［Ａ］に到達する。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

［Ａ]はこのようにして得られた。[Ｂ]も同様の方法で得られるが、略す。

最後に冒頭の六式から四式だけ、つまり[４]と[Ａ]、[２]と[Ｂ]を再掲して眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a-\mathrm{sh}0}+\frac{1}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}3a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right\}$$ ----[4]

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}0}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}5a-\mathrm{sh}3a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot$$ ----[A]

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a-\mathrm{sh}0}-\frac{1}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}2a}-\frac{1}{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}3a}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right\}$$ ----[2]

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}0}-\frac{1}{\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}2a}-\frac{1}{\mathrm{sh}5a-\mathrm{sh}3a}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot \qquad \text{----[B]}$$

$(a > 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　このように並べると［４］と［Ａ］、そして［２］と［Ｂ］はとても似ているとわかるであろう。比較して見ることで、式の味わいが増す気がする。見事な対応関係を成している。

　［４］,［２］より［Ａ］,［Ｂ］の方がシンプルでよい形である。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●［Ａ］や［Ｂ］は調和とふしぎの両方を備えていて、眺めていて飽きないものである。これらを見ているときは、優雅な工芸品を見ているのと同じような感覚である。私は、式の実用的な方面には関心がうすい。

●数学は上記の美的感覚で十分とおもっているが、一方で数学はサイエンスの面があることも事実である。「杉岡氏の公式が水爆兵器の設計に役立ち、人類滅亡につながった！」というようなことになったら、とても悲しい。実際そんなことになるわけないが、しかし数学というのはそういう危うさも抱えたものであることは忘れてはいけないと思っている。有用な進歩に使われてほしいが、負の面にも役立つのが数学である。

●本当のところ、今回の二式のほかに［１］や［３］に対応する式も出ると思っていた。つまり当初の予定は、［１］～［４］に対応する新種の四式が出るはずであった。ところが、ふたをあけると出たのは二式だけである。おかしい・・という感じである。

　基本式（母等式）の式変形で見落としている点があるのだろうか。。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.8.19　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）