＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２０＞

新たに恒等式が得られたので紹介したい。次の[1]と[2]である。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sha+sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a+sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a+sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a+sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[1]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha-sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a-sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a-sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a-sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[2]}$$

$$(a\neq 0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この二式が得られた。これまでのものとちょっと違う形をしていて、一風変わった雰囲気を醸し出している。

なお、左辺での第一項の sh0 はゼロであるが、秩序を強調するためにあえて sh0 とした。

両式とも第五系列と第六系列の母等式を組み合わせることによって導出（証明）できた。そして念のため、Excel でいくつかの a を代入して数値的に正しいことも確認した。

[1]の証明の概要を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

［１］の証明の概要

これまで第一系列～第四系列までの基本式（母等式）を見出したが、さらに第五系列と第六系列の基本式を導出した。

まず第五系列の基本式を示す。[基本式1]とした。

$$\frac{\cos x}{e^{a}-1}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}-1}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\cos 2x}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式1]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a > 0)$

次に第六系列の基本式を示す。[基本式2]とした。

$$\frac{\cos x}{e^{a}+1}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}+1}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2x}+-\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式2]}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a > 0)$

これら基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を用いて導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形（やや特殊な変形）と類似の方法である。⇒ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)

なお上記基本式の導出において、公式集に載っているあるフーリエ級数を利用して、次のフーリエ級数を導出し、これを存分に活用した。

$$\frac{\cos x}{e^{a}}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+-\cdot\cdot \;=\frac{\mathrm{ch}a\cdot\cos x}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a > 0)$

次に、[基本式１]と[基本式2]を辺々足し算して変形していくと、次の<融合式１>が得られる。

$$\frac{\cos x}{\mathrm{sh}a}-\frac{\cos 3x}{\mathrm{sh}3a}+\frac{\cos 5x}{\mathrm{sh}5a}-\frac{\cos 7x}{\mathrm{sh}7a}+-\cdot\cdot$$

$$=2\cos x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\cos 2x}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---<融合式 1>}$$

$(-\pi \le x \le \pi,\ a > 0)$

この式の x に ai/2 を代入して(i：虚数単位)、変形していくと、[１] に到達する。
導出終わり。
==================================

［１]はこのようにして得られた。[２]も同様の方法で得られるが、略す。

式を再び眺めよう。
==================================

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a+\mathrm{sh}0}-\frac{1}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a+\mathrm{sh}2a}-\frac{1}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}3a}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[1]}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}-\mathrm{sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a}-\mathrm{sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a}-\mathrm{sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a}-\mathrm{sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[2]}$$

$(a \neq 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらは、なんともいえない秩序が出ていて味わいがある。二式の関係性・対称性もよい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の[1],[2]は、これまでに得た多くの式、例えば次のようなものとはちょっと違っている。次などより、もっとふしぎな感じが漂っている。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh2a}}-\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}-\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+-\cdot\cdot \quad \text{-----B}$$

$(a > 0)$

上式は実数の範囲で証明したものだが、今回の式は証明の概要でも見たように最後に虚数を使う。
多くの式は実数の範囲で証明できるのだが、虚数を使って証明した式も少なからずある。今回の式がその例である。
虚数世界を経由して出てきた式は、ふしぎな感じのするものが多いように思う。

● 今回の式は、ある別の式を証明しようとしていた途上に偶然に見出したものである。数学の研究では、偶然に見つかるという場合が非常に多い。
研究は手計算でやっているので、速度は遅い。ゆっくり進んでいると、足元にぽっかりと開いた洞窟の入り口がよく目につく。あれ？こんなところに洞窟が・・。その洞窟に入ると、きらきらと輝く鉱石が落ちている。それを拾っては喜んでいる。高性能の車で進んでいると、どうも見落としが多くなるような気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.8.11　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）