＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１９＞

さらに四つの恒等式が得られたので紹介したい。以下の四つである。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh^25a}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot \quad \text{----<1>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}-\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch^2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch^23a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch^25a}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch^27a}}+\cdot\cdot \quad \text{----<2>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{cha}}-\frac{3}{\mathrm{ch3a}}+\frac{5}{\mathrm{ch5a}}-\frac{7}{\mathrm{ch7a}}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch^2a}}-\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch^23a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch^25a}}-\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch^27a}}+-\cdot\cdot \quad \text{---<3>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch3a}}+\frac{5}{\mathrm{ch5a}}+\frac{7}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh^2a}}-\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh^25a}}-\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh^27a}}+-\cdot\cdot \quad \text{----<4>}$$

$(a\neq 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

得られたのはこの四式である。これらも円環の原理が成り立っていて美しい。左辺も右辺も、ゼータの香りが漂っている。円環の原理の意味はこちらを参照いただきたい。

＜１＞、＜２＞は、母等式から証明済みである。

＜３＞、＜４＞は、円環の原理から機械的に得たものである。Excel で数値的に正しいことを確認したものであり未証明である。

＜１＞の証明の概要を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜１＞の証明の概要

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh^25a}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot \quad \text{----<1>}$$

$(a>0)$

上式を証明する。

　これまで第一系列～第四系列までの基本式を見出したが、＜１＞は第三系列と第四系列の基本式に関係する。

　　まず次の第三系列の基本式を示す。[基本式1]とした。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}-1}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\sin x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式1]}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

　　次に第四系列の基本式を示す。[基本式2]とした。

$$\frac{\sin x}{e^{a}+1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}+1}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\sin x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}+-\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式2]}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

　これらの基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を用いて導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形（やや特殊な変形）と類似の方法である。⇒ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)

　　次に、[基本式１]と[基本式2]を辺々足し算して（変形して）、次の式＜融合式１＞が得られる。

$$\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}+\frac{\sin 3x}{\mathrm{sh}3a}+\frac{\sin 5x}{\mathrm{sh}5a}+\frac{\sin 7x}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\sin x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a-\cos 2x}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---<融合式 1>}$$

$$(a>0)$$

　この式に対し両辺を sinx で割り、x を 0 に無限に近づけていき(x->0)、ロピタルの定理を適用すると、目的の＜１＞が得られる。

　導出終わり。

　＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　　　＜１＞ はこのようにして得られた。＜２＞も同様の方法で得られるが、略す。

　最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 証明で言及した、ロピタルの定理を使う方法は割合最近気づいたものである。気付いたときは「こんな方法があるのか！」と思った。

現在、第一系列～第四系列まで母等式を得ていて、さらに各系列で複数の基本式が存在している。そしてそれらの基本式は、a と x の２変数になっている。a は一応定数だが変数と同じ。

よって、それら基本式から得られる恒等式もたいへんな数となる。ここ半年で何十個と得られた。

結局、基本式の数が多く、変数の数も多くて、そして基本式同士の組み合わせなど、いろいろと工夫ができるため、多くの恒等式が飛び出してくるということになっている。

● 上記のような感じなので、ここは豊かな漁場という感じである。あるいは豊かな鉱山ともいえる。

漁場という点では、魚がうようよいる感じで、別に高級な漁具(高等数学)など使わずともタモ網ですくいとれる。鉱山という点では、人が入っていないので原石が足元に転がっていて簡単に拾うことができる。

数学というのは、漁場や鉱山に似ている。

● 証明の＜融合式１＞の x にπ/2 を代入すると、次が得られる。これもきれいである。

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{sh3a}}+\frac{1}{\mathrm{sh5a}}-\frac{1}{\mathrm{sh7a}}+-\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch5a}}+\frac{1}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot$$

$(a > 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.7.17　杉岡幹生