＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１８＞

双曲線ゼータ周辺で出た恒等式のうち、以下の四つ（③，④，Ｄ，Ｃ）を取り上げ、それを円環の原理の視点から眺めてみたい。

なお、双曲線関数 sinh，cosh はそれぞれ sh，ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdots=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdots \quad \text{----③}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdots=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdots \quad \text{----④}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+-\cdots=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}-\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}-\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+-\cdots \quad \text{----D}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdots=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}-\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}-\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+-\cdots \quad \text{----C}$$

$$(a>0)$$

この四式であるが、これらには円環の原理が成り立つ。これまで③とＣ，④とＤでそれぞれ双対性を見たが、円環の原理はそれらを全て飲み込むものとなっている。

ここで、円環の原理を復習しよう。

それは次の規則から成る簡潔な法則である。この定義に、今回符号置換という言葉を新たに加えたが、これまでと本質的に同じである。

****

＜円環の原理＞

双曲線ゼータ関連での恒等式において、ある一つの恒等式Ａに着目する。

その恒等式Ａのある片方の辺に対して強制的に sh と ch を置き換える。つまり、sh ならば ch に、ch ならば sh に置き換える。これを sh−ch 置換と呼ぶ。

次にもう片方の辺に対して強制的に符号だけを変える。その変え方は次のようにする。もし+ばかりの級数（〇+〇+〇+〇+・・）ならば交代級数(〇−〇+〇−〇+−・・)に変え、もし交代級数(〇−〇+〇−〇+−・・)ならば+ばかりの級数（〇+〇+〇+〇+・・）に変える。これを符号置換と呼ぶ。

そのようにして機械的に生み出された恒等式は、ふしぎなことに正しい式となる。

上記の規則を行っていくと、いくつかの式を経た所で元の式に戻ってくる。これが円環の原理である。円環の原理が成り立つ式ばかりを集めたものを円環集合と呼ぶことにする。

****

四式を再掲。

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}-\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}-\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+-\cdot\cdot \quad \text{----D}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}-\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}-\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+-\cdot\cdot \quad \text{----C}$$

$$(a>0)$$

これら四式において円環の原理が成り立っていることを見てみよう。

＜ 四式（③、④、Ｄ、Ｃ）に対して円環の原理を見る ＞

●まず③に着目する。③右辺に対し sh−ch 置換を行う。すると④右辺がそれとなる。ここで④左辺を見ると、それは③左辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

●次に④左辺に対し sh−ch 置換を行う。するとＤ左辺がそれとなる。ここでＤ右辺を見ると、それは④右辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

●次にＤ右辺に対し sh−ch 置換を行う。するとＣ右辺がそれとなる。ここでＣ左辺を見ると、それはＤ左辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

●次にＣ左辺に対し sh−ch 置換を行う。すると③左辺がそれとなる。ここで③右辺を見ると、それはＣ右辺を符号置換したものになっている！ＯＫ.

ここで元の③に戻った。③⇒④⇒Ｄ⇒Ｃ⇒③となって、円が閉じた。

以上。

このように円環の原理が成り立っていることがわかる。ちなみに、この四式は母等式を用いて証明済みである。

上記では、③からスタートしたが、別にどの式（どの辺から）からスタートしてもよい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 四式は左右両辺において、ゼータの香りが漂っている。式は単独でもきれいであるが、四式は連鎖的につながっていて余計に美しさが際立っている。

●ゼータの世界はきれいなものしかでてこない。よって、長い計算をしてゼータらしくない結果がでたら、なにかおかしいと式の姿から判断できることが非常に多い。また「ゼータならこうなっているはずだ！」と式の形を予想できることも多い。研究ではそんな利点を享受している。

醜いことは少ないのだが、唯一、リーマン予想では、つまりは非自明な零点の領域では醜いことになることがしばしばある。それは私がなにも見えていないからそうなるのであって、地下深くでは想像を絶する美と調和が用意されているのだと思う。

● ③だけ再掲。式を眺めていると、まるで sh2a や ch3a が２や３に似た数のようなものに見えてくる。

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.7.8　杉岡幹生