# ＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１７＞

以下の恒等式が得られたので紹介したい。[1]と[2]である。log は自然対数である。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}6a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}10a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}14a}+\cdot\cdot=\log\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}+\log\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}+\log\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}+\log\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot \quad \text{---[1]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{3\mathrm{ch}6a}+\frac{1}{5\mathrm{ch}10a}+\frac{1}{7\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot=\log\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}-\log\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}+\log\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}-\log\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}7a}+-\cdot\cdot \quad \text{---[2]}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらが得られた。[1]は証明済みである。[2]は円環の原理からその成立を予想し数値的に正しいことを確認した段階のものである（未証明）。左辺はゼータの香りが漂っていて、ふしぎな感じがある。

円環の原理は４式で成り立つものが多いが、後の２式は不成立であった。円環の原理も log が関わるものはデリケートなことになっているようである。円環の原理の意味については、こちらの記事を参照。

[1]の証明の概要を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜[1]の証明の概要＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}6a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}10a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}14a}+\cdot\cdot=\log\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}+\log\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}+\log\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}+\log\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot \quad \text{---[1]}$$

上式を証明する。

これまで第一系列～第四系列までの基本式を見出したが、[1]は第三系列と第四系列の基本式に関係する。

まず次の第三系列の基本式を示す。[基本式1]とした。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}-1}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\sin x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式1]}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

次に第四系列の基本式を示す。[基本式2]とした。

$$\frac{\sin x}{e^{a}+1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}+1}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\sin x\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}+-\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式2]}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

これらの基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を使って導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形（やや特殊な変形）と類似の方法である。ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)

次に、[基本式１]と[基本式2]を x について辺々積分した式をそれぞれ導出した（複雑なので略)。その二式を辺々足し算して（変形して）得られた式の x にπ/2 を代入すると、[1]が得られる。

導出終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[1]はこのようにして得られた。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ここ半年多くの恒等式を出してきたが、その源をたどれば、１１年前の研究にいきつく。

ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp) 、ファン・ネス彗星　その２ (biglobe.ne.jp)

そこではラマヌジャン式と双曲線ゼータが密接に結びつくことを示した。ラマヌジャン式は保型形式に関係する。よって、ここ半年で出した一連の恒等式も、どこか保型形式に関係していると思う。

[1]と[2]の形がほぼ同じということからもそれが感じられる。[1]左辺の sh を ch に替えても、右辺は形ほとんど変わらない。関数を替えても形がほぼ一緒というちょっと変わったことになっている。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}6a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}10a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}14a}+\cdot\cdot=\log\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}+\log\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}+\log\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}+\log\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot \text{ --[1]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{3\mathrm{ch}6a}+\frac{1}{5\mathrm{ch}10a}+\frac{1}{7\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot=\log\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}-\log\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}+\log\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}-\log\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}7a}+-\cdot\cdot \text{ --[2]}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023. 7. 2　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)