＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１６＞

＜双曲線ゼータとその派生式　その１４＞で円環の原理が成り立つ四つの恒等式を紹介した。それは下記のものであるが、その中の[新恒等式]だけはまだ証明できていなかった。その証明に成功したので、今回はその概要を示したい。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a) のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a > 0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1}{sh^2a}-\frac{3}{sh^23a}+\frac{5}{sh^25a}-\frac{7}{sh^27a}+-\cdot\cdot=\frac{2sh2a}{ch^22a}+\frac{4sh4a}{ch^24a}+\frac{6sh6a}{ch^26a}+\frac{8sh8a}{ch^28a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{sh^2a}+\frac{3}{sh^23a}+\frac{5}{sh^25a}+\frac{7}{sh^27a}+\cdot\cdot=\frac{2ch2a}{sh^22a}+\frac{4ch4a}{sh^24a}+\frac{6ch6a}{sh^26a}+\frac{8ch8a}{sh^28a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{ch^2a}+\frac{3}{ch^23a}+\frac{5}{ch^25a}+\frac{7}{ch^27a}+\cdot\cdot=\frac{2ch2a}{sh^22a}-\frac{4ch4a}{sh^24a}+\frac{6ch6a}{sh^26a}-\frac{8ch8a}{sh^28a}+-\cdot\cdot \quad \text{---[新恒等式]}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{ch^2a}-\frac{3}{ch^23a}+\frac{5}{ch^25a}-\frac{7}{ch^27a}+-\cdot\cdot=\frac{2sh2a}{ch^22a}-\frac{4sh4a}{ch^24a}+\frac{6sh6a}{ch^26a}-\frac{8sh8a}{ch^28a}+-\cdot\cdot \quad \text{----A}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記の[新恒等式]に対し、＜双曲線ゼータとその派生式　その１４＞の最後で私は次のように述べた。

****

● 今回下記の[新恒等式]を見つけたわけだが、これが出たということは、まだ私がもっていない母等式がどこかに存在していて、それがみつかれば、この式が論理的に導出（証明）できることになる。

下式もゼータの香りが漂っている。ふしぎな式であり味わいがある。

$$\frac{1}{ch^2a}+\frac{3}{ch^23a}+\frac{5}{ch^25a}+\frac{7}{ch^27a}+\cdot\cdot=\frac{2ch2a}{sh^22a}-\frac{4ch4a}{sh^24a}+\frac{6ch6a}{sh^26a}-\frac{8ch8a}{sh^28a}+-\cdot\cdot \quad \text{---[新恒等式]}$$

$$(a\neq 0)$$

****

この「どこかに存在していて、・・」の母等式を見つけることができた。これまで第一系列、第二系列の母等式から出た恒等式を中心に示してきたが、現在は、第三系列、第四系列の基本式（母等式）まで見出し終えた段階である。

そして、[新恒等式]は第四系列の基本式から導出（証明）できた。その証明の概要を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
＜証明の概要＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}-\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}-\frac{8\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+-\cdot\cdot \quad \text{---[新恒等式]}$$

上式を証明する。

これまで第一系列～第四系列まで基本式を見出したが、上記式は第四系列に関係する。

第四系列の次の基本式を導いた。

$$\frac{\cos x}{e^a+1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}+1}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left\{\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}+-\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[基本式]}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

この式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を使って導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形（やや特殊な変形）と類似の方法である。[ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)]

[基本式]を導く過程で、大事な役割を果たすのが次のフーリエ級数である。(次式は公式集にある類似のフーリエ級数を用いることで導いたもの)

$$\frac{\cos x}{e^a}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\cos x\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

次に[基本式]を a について微分した式を出した（少し複雑なので略)。その式の x に 0 を代入することで、[新恒等式]を得ることができる。

導出終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[新恒等式]はこのような方法で得られた。四式を再掲して眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\frac{8\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}-\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}-\frac{8\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+-\cdot\cdot \quad \text{---[新恒等式]}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}-\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}-\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+-\cdot\cdot \quad \text{----A}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　これらはきれいであり、いくら眺めていても飽きない。円環の原理が成り立つことからも、対称性の素晴らしさが際立っている。円環の原理については前回の記事を参照。

　最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ＜ゼータの香りの漂う・・＞シリーズは５年以上になるが、ゼータの分割（分裂）がいつも中心の大河の流れを形成している。ただし、その大河にはいくつも支流があって、これまでいろいろな支流に紛れ込んで探検してきたという印象がある。この＜双曲線ゼータとその派生式＞もたしかに支流に違いない。支流もある程度のところまで行くと、「そろそろ・・」とまた本流まで戻ってくることになる。どこの地点で引き返すのか、悩ましいことが多い。

●５年前にゼータの分割を発見したときは、深い感動に襲われた。宇宙の底が抜けたように思った。ところが、そのうち当たり前になってしまった。慣れるなどということは、つまらないことだと思う。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.7.1　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）