＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１５＞

「双曲線ゼータとその派生式」では、ここまでで３５個の恒等式を得たが、さらに新たな恒等式を見出したので、それを今回は紹介したい。

前回は“円環の原理”という原理を見出し（私がそう命名）、それを用いて発見した新たな式を一つ追加した。今回もその原理を使って新たな恒等式を二つ発見できたので（その一つは双対性から先に示したものだが）、それを紹介する。円環の原理は強力な公式生成マシンである。

では、今回、発見した二つの恒等式を示す。以下のＡ１とＡ２がそれである。円環の原理が成り立つ四式の中に埋め込んだ形で示した。

②は第一系列母等式から、Ｂは第二系列母等式から導いたものであり、先にこちらで示したものである。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \qquad (a>0) \qquad \text{----②}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot \qquad (a\neq 0) \qquad \text{----A1}$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 5a}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{ch}2a}-\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}-\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+-\cdot\cdot \qquad (a\neq 0) \qquad \text{-----A2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}-\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}-\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+-\cdot\cdot \qquad (a>0) \qquad \text{-----B}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Ａ１とＡ２が新たに得た恒等式である。

この四式は美しく調和に満ちている。そしていずれの式もゼータの香りが漂っている。

さて、円環の原理を復習しよう。次の規則から成る簡潔な法則である。前回の定義を再掲。

****

＜円環の原理＞

双曲線ゼータ関連での恒等式において、ある一つの恒等式Ａに着目する。

その恒等式Ａのある片方の辺に対して強制的に sh と ch を置き換える（sh ならば ch に、ch ならば sh に置き換える。これを sh−ch 置換と呼ぶ)。

次にもう片方の辺に対して強制的に符号だけを変える。その変え方は次のようにする。もし+ばかりの級数（〇+〇+〇+〇+・・）ならば交代級数(〇−〇+〇−〇+−・・)に変え、もし交代級数(〇−〇+〇−〇+−・・)ならば+ばかりの級数（〇+〇+〇+〇+・・）に変える。

そのようにして機械的に生み出された恒等式は、ふしぎなことに正しい式となる。

上記の規則を行っていくと、いくつかの式を経た所で元の式に戻ってくる。これが円環の原理である。円環の原理が成り立つ式ばかりを集めたものを円環集合と呼ぶことにする。

****

四式を再掲しよう。(円環の原理を確かめるため)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \qquad \text{-----②}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot \qquad \text{----A1}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 5a}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{ch}2a}-\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}-\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+-\cdot\cdot \qquad \text{------A2}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}-\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}-\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+-\cdot\cdot \qquad \text{------B}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらを用いて、円環の原理を見てみよう。

＜ 四式（②、Ａ１、Ａ２、Ｂ）に対して円環の原理を見る ＞

●まず②に着目する。②右辺に対し sh-ch 置換（sh ならば ch に、ch ならば sh に置き換える）を行う。するとＡ１右辺がそれとなる。ここでＡ１左辺を見ると、それは②左辺の符号だけを変えたものになっている！ＯＫ.

●次にＡ１左辺に対し sh-ch 置換を行う。するとＡ２左辺がそれとなる。ここでＡ２右辺を見ると、それはＡ１右辺の符号だけを変えたものになっている！ＯＫ.

●次にＡ２右辺に対し sh-ch 置換を行う。するとＢ右辺がそれとなる。ここでＢ左辺を見ると、それはＡ２左辺の符号だけを変えたものになっている！ＯＫ.

●次にＢ左辺に対し sh-ch 置換を行う。すると②左辺がそれとなる。ここで②右辺を見ると、それはＢ右辺の符号だけを変えたものになっている！ＯＫ.

ここで元の②に戻った。②⇒Ａ１⇒Ａ２⇒Ｂ⇒②となって、円が閉じた。

以上。

このように四式に対して円環の原理が成り立っていることがわかる。

Ａ１とＡ２が、こんなにも簡単に得られてしまうというのは驚くべきことである。

Ａ１，Ａ２を Excel マクロで数値検証すると、正しい式であった。ただし、厳密に母等式から導いたものではないので、いずれは母等式から導かないといけない。

ちなみに、②とＢは、母等式から厳密に導いた式であり証明済みである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●　Ａ１とＡ２は、結論から先に出てきたような（天から降って来たような）形で得られた。

そのことは、私がまだ発見できていない母等式がどこかに存在していることを暗示している。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.6.21　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)