

＜ 双曲線ゼータとその派生式 その14 ＞

----- 円環の原理の発見 -----

＜双曲線ゼータとその派生式＞で多くの恒等式を見出してきたが、そこには裏返しの関係ともいべき双対性の関係をもつ対（ペア）の式が存在していた。今回、その双対性をさらに延長的に普遍化した、ある強力な原理を発見したので報告したい。

その原理を“円環の原理”と名付け、今後その呼称で用いていく。内容は下方の＜円環の原理＞参照。

それは簡単な規則でありながら強力であり、それを使えば恒等式が機械的に得られていく。今回は、美しい円環の原理とともに新たに見出した恒等式も一緒に紹介しよう。

まず円環の原理が成立する四つの恒等式（集合）の一例を以下に示す。新たに見出した恒等式は下記の[新恒等式]となる。①、⑧、Aは、前回以前に見出し紹介した式である。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a) のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、(a > 0) は “a は 0 より大きい実数” を意味する。

=====

＜円環の原理が成立する四つの恒等式＞

$$\frac{1}{\text{sh}^2 a} - \frac{3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{5}{\text{sh}^2 5a} - \frac{7}{\text{sh}^2 7a} + \dots = \frac{2\text{sh}2a}{\text{ch}^2 2a} + \frac{4\text{sh}4a}{\text{ch}^2 4a} + \frac{6\text{sh}6a}{\text{ch}^2 6a} + \frac{8\text{sh}8a}{\text{ch}^2 8a} + \dots \text{----} \text{①}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\text{sh}^2 a} + \frac{3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{5}{\text{sh}^2 5a} + \frac{7}{\text{sh}^2 7a} + \dots = \frac{2\text{ch}2a}{\text{sh}^2 2a} + \frac{4\text{ch}4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{6\text{ch}6a}{\text{sh}^2 6a} + \frac{8\text{ch}8a}{\text{sh}^2 8a} + \dots \text{----} \text{⑧}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{5}{\text{ch}^2 5a} + \frac{7}{\text{ch}^2 7a} + \dots = \frac{2\text{ch}2a}{\text{sh}^2 2a} - \frac{4\text{ch}4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{6\text{ch}6a}{\text{sh}^2 6a} - \frac{8\text{ch}8a}{\text{sh}^2 8a} + \dots \text{----} \text{[新恒等式]}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{ch}^2 a} - \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{5}{\text{ch}^2 5a} - \frac{7}{\text{ch}^2 7a} + \dots = \frac{2\text{sh}2a}{\text{ch}^2 2a} - \frac{4\text{sh}4a}{\text{ch}^2 4a} + \frac{6\text{sh}6a}{\text{ch}^2 6a} - \frac{8\text{sh}8a}{\text{ch}^2 8a} + \dots \text{----} \text{A}$$

(a > 0)

=====

まず円環の原理とは、次のようなものである。

<円環の原理>

双曲線ゼータ関数での恒等式において、ある一つの恒等式Aに着目する。

その恒等式Aのある片方の辺に対して強制的に sh と ch を置き換える (sh ならば ch に、ch ならば sh に置き換える。これを sh-ch 置換と呼ぶ)。

次にもう片方の辺に対して強制的に符号だけを変える。その変え方は次のようにする。もし+ばかりの級数 (O+O+O+O+...) ならば交代級数 (O-O+O-O+...) に変え、もし交代級数 (O-O+O-O+...) ならば+ばかりの級数 (O+O+O+O+...) に変える。

そのようにして機械的に生み出された恒等式は、ふしぎなことに正しい式となる。

上記の規則を行っていくと、いくつかの式を経た所で元の式に戻ってくる。これが円環の原理である。円環の原理が成り立つ式ばかりを集めたものを円環集合と呼ぶことにする。

このようなものだが、上記の四式を用いて、この原理を見てみよう。

< 四式 (①、⑧、[新恒等式]、A) に対して円環の原理を見る >

- まず①に着目する。①右辺に対し sh-ch 置換 (sh ならば ch に、ch ならば sh に置き換える) を行う。すると⑧右辺がそれとなる。ここで⑧左辺を見ると、それは①左辺の符号だけを変えたものになっている!
- 次に⑧左辺に対し sh-ch 置換を行う。すると[新恒等式]左辺がそれとなる。ここで[新恒等式]右辺を見ると、それは⑧右辺の符号だけを変えたものになっている!
- 次に[新恒等式]右辺に対し sh-ch 置換を行う。するとA右辺がそれとなる。ここでA左辺を見ると、それは[新恒等式]左辺の符号だけを変えたものになっている!
- 次にA左辺に対し sh-ch 置換を行う。すると①左辺がそれとなる。ここで①右辺を見ると、A右辺の符号だけを変えたものになっている!
ここで元の①に戻った。①⇒⑧⇒[新恒等式]⇒A⇒①となって、円が閉じた。
以上。

この例から、円環の原理は簡単!と思われるのではなかろうか。

母等式から苦労して出した⑧やAが、こんなにも簡単に得られてしまうというのは驚くべきことである。

[新恒等式]を数値検証すると、正しい式であった。ただし、厳密に母等式から導いたものではないので、いずれは母等式から導かないといけない。

ここで見た四式は一例であって、他にいくつも例はある。おいおい紹介していきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

- 結局、円環の原理とは、たった一つの恒等式が得られれば、いくつもの恒等式が同時にイモずる式に出る！と主張するものである。

①が得られたら、⑧も[新恒等式]もAも同時に得られる、ということ。

円環の原理は、強力な公式生成マシンであるとも言える。

- 今回は①からスタートしたが、Aからはじめても[新恒等式]からはじめても、どこからはじめても同じ集合内で元に戻ってくるはずである。確認はしていないが。

- sh-ch 置換を群の演算ととらえて、円環集合を群としてとらえられるだろうか。まったくわからない。

- 今回下記の[新恒等式]を見つけたわけだが、これが出たということは、まだ私のもっていない母等式がどこかに存在していて、それがみつければ、この式が論理的に導出（証明）できることになる。

下式もゼータの香りが漂っている。ふしぎな式であり味わいがある。

$$\frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{5}{\text{ch}^2 5a} + \frac{7}{\text{ch}^2 7a} + \dots = \frac{2\text{ch}2a}{\text{sh}^2 2a} - \frac{4\text{ch}4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{6\text{ch}6a}{\text{sh}^2 6a} - \frac{8\text{ch}8a}{\text{sh}^2 8a} + \dots \text{---[新恒等式]}$$

(a ≠ 0)

=====

2023. 6. 3 杉岡幹生

<参考文献>

・「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)