

## ＜ 双曲線ゼータとその派生式 その13 ＞

----- 双対性と保型性 -----

第二系列母等式グループからさらに恒等式を六つ見出したので、これまでの分と合わせて下方に示しておく (I ~ Nの六つ)。

なお、双曲線関数  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$  はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、 $sh2a$  は  $\sinh(2a)$  のことである。また  $a$  や  $b$  は任意の実数であり、よって例えば、 $(a > 0)$  は “ $a$  は 0 より大きい実数” を意味する。

これまでに得られた式では、ある式と別のある式 (対を成す二式) が 双対的な関係 になっていると同時に、右辺の形がほとんど変わらないという保型的な性質 も出ている。すなわち、それは、対の二式において  $\cosh$  を  $\sinh$  に置き換えても (逆でも同じ) 右辺はほとんど形を変えないというふしぎな性質 である。

例えば、Cと③は次のように右辺は (符号以外) ほとんど同じある。

$$\frac{1^2}{ch^2a} + \frac{2^2}{ch^22a} + \frac{3^2}{ch^23a} + \frac{4^2}{ch^24a} + \dots = \frac{cha}{sh^3a} - \frac{2ch2a}{sh^32a} + \frac{3ch3a}{sh^33a} - \frac{4ch4a}{sh^34a} + \dots \quad \text{---- C}$$

(a > 0)

$$\frac{1^2}{sh^2a} + \frac{2^2}{sh^22a} + \frac{3^2}{sh^23a} + \frac{4^2}{sh^24a} + \dots = \frac{cha}{sh^3a} + \frac{2ch2a}{sh^32a} + \frac{3ch3a}{sh^33a} + \frac{4ch4a}{sh^34a} + \dots \quad \text{---- ③}$$

(a > 0)

このような関係が第二系列と第一系列の間で多く成り立っている。以下観察してほしい。

=====

### ＜第二系列母等式グループから得られた恒等式＞

$$\frac{1}{ch^2a} - \frac{3}{ch^23a} + \frac{5}{ch^25a} - \frac{7}{ch^27a} + \dots = \frac{2sh2a}{ch^22a} - \frac{4sh4a}{ch^24a} + \frac{6sh6a}{ch^26a} - \frac{8sh8a}{ch^28a} + \dots \quad \text{---- A}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{ch^2a} + \frac{1}{ch^23a} + \frac{1}{ch^25a} + \frac{1}{ch^27a} + \dots = \frac{2}{sh2a} - \frac{4}{sh4a} + \frac{6}{sh6a} - \frac{8}{sh8a} + \dots \quad \text{---- B}$$

(a > 0)

$$\frac{1^2}{ch^2a} + \frac{2^2}{ch^22a} + \frac{3^2}{ch^23a} + \frac{4^2}{ch^24a} + \dots = \frac{cha}{sh^3a} - \frac{2ch2a}{sh^32a} + \frac{3ch3a}{sh^33a} - \frac{4ch4a}{sh^34a} + \dots \quad \text{---- C}$$

(a > 0)

$$\frac{1^2}{ch^2a} - \frac{2^2}{ch^22a} + \frac{3^2}{ch^23a} - \frac{4^2}{ch^24a} + \dots = \frac{sha}{ch^3a} - \frac{2sh2a}{ch^32a} + \frac{3sh3a}{ch^33a} - \frac{4sh4a}{ch^34a} + \dots \quad \text{---- D}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{cha} + \frac{2}{ch2a} + \frac{3}{ch3a} + \frac{4}{ch4a} + \dots$$

$$= 2 \left\{ \frac{\text{ch}2a \cdot \text{cha}-1}{(\text{ch}2a-\text{cha})^2} - \frac{2(\text{ch}4a \cdot \text{cha}-1)}{(\text{ch}4a-\text{cha})^2} + \frac{3(\text{ch}6a \cdot \text{cha}-1)}{(\text{ch}6a-\text{cha})^2} - \frac{4(\text{ch}8a \cdot \text{cha}-1)}{(\text{ch}8a-\text{cha})^2} + \dots \right\} \quad \text{---E}$$

(a ≠ 0)

$$2 \left( \frac{\text{sha}}{\text{ch}^3a} + \frac{3\text{sh}3a}{\text{ch}^33a} + \frac{5\text{sh}5a}{\text{ch}^35a} + \frac{7\text{sh}7a}{\text{ch}^37a} + \dots \right) = \frac{2^2\text{ch}2a}{\text{sh}^22a} - \frac{4^2\text{ch}4a}{\text{sh}^24a} + \frac{6^2\text{ch}6a}{\text{sh}^26a} - \frac{8^2\text{ch}8a}{\text{sh}^28a} + \dots \quad \text{---F}$$

(a > 0)

$$\frac{\text{ch}b}{\text{ch}^2a} + \frac{2\text{ch}2b}{\text{ch}^22a} + \frac{3\text{ch}3b}{\text{ch}^23a} + \frac{4\text{ch}4b}{\text{ch}^24a} + \dots$$

$$= \frac{2(\text{ch}2a \cdot \text{ch}b-1)}{(\text{ch}2a-\text{ch}b)^2} - \frac{4(\text{ch}4a \cdot \text{ch}b-1)}{(\text{ch}4a-\text{ch}b)^2} + \frac{6(\text{ch}6a \cdot \text{ch}b-1)}{(\text{ch}6a-\text{ch}b)^2} - \frac{8(\text{ch}8a \cdot \text{ch}b-1)}{(\text{ch}8a-\text{ch}b)^2} + \dots \quad \text{---G}$$

(|b| < |2a|)

$$\frac{\text{sh}^2b}{\text{ch}^2a} + \frac{\text{sh}^22b}{\text{ch}^22a} + \frac{\text{sh}^23b}{\text{ch}^23a} + \frac{\text{sh}^24b}{\text{ch}^24a} + \dots$$

$$= 2\text{sh}^2b \left\{ \frac{1}{(\text{ch}2a-\text{ch}2b)\text{th}a} - \frac{2}{(\text{ch}4a-\text{ch}2b)\text{th}2a} + \frac{3}{(\text{ch}6a-\text{ch}2b)\text{th}3a} - \frac{4}{(\text{ch}8a-\text{ch}2b)\text{th}4a} + \dots \right\} \quad \text{---H}$$

(a > 0, |b| < a)

$$\frac{1^2}{\text{ch}^2a} - \frac{3^2}{\text{ch}^23a} + \frac{5^2}{\text{ch}^25a} - \frac{7^2}{\text{ch}^27a} + \dots$$

$$= 2 \left\{ \frac{\text{sh}^22a-1}{\text{ch}^32a} - \frac{2(\text{sh}^24a-1)}{\text{ch}^34a} + \frac{3(\text{sh}^26a-1)}{\text{ch}^36a} - \frac{4(\text{sh}^28a-1)}{\text{ch}^38a} + \dots \right\} \quad \text{---I}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{\text{sh}b}{\text{ch}^2a} + \frac{2\text{sh}2b}{\text{ch}^22a} + \frac{3\text{sh}3b}{\text{ch}^23a} + \frac{4\text{sh}4b}{\text{ch}^24a} + \dots$$

$$= \text{sh}b \left\{ \frac{2\text{sh}2a}{(\text{ch}2a-\text{ch}b)^2} - \frac{4\text{sh}4a}{(\text{ch}4a-\text{ch}b)^2} + \frac{6\text{sh}6a}{(\text{ch}6a-\text{ch}b)^2} - \frac{8\text{sh}8a}{(\text{ch}8a-\text{ch}b)^2} + \dots \right\} \quad \text{---J}$$

(a > 0, |b| < 2a)

$$\frac{3^3-3}{\text{ch}^23a} - \frac{5^3-5}{\text{ch}^25a} + \frac{7^3-7}{\text{ch}^27a} - \frac{9^3-9}{\text{ch}^29a} + \dots = 6 \left( \frac{2\text{sh}2a}{\text{ch}^42a} - \frac{4\text{sh}4a}{\text{ch}^44a} + \frac{6\text{sh}6a}{\text{ch}^46a} - \frac{8\text{sh}8a}{\text{ch}^48a} + \dots \right) \quad \text{---K}$$

(a > 0)

$$2 \left( \frac{2^3-2}{\text{ch}^22a} + \frac{3^3-3}{\text{ch}^23a} + \frac{4^3-4}{\text{ch}^24a} + \frac{5^3-5}{\text{ch}^25a} + \dots \right) = 3 \left( \frac{1}{\text{sh}^4a} - \frac{2}{\text{sh}^42a} + \frac{3}{\text{sh}^43a} - \frac{4}{\text{sh}^44a} + \dots \right) \quad \text{---L}$$

(a ≠ 0)

$$2 \left( \frac{2^3-2}{\text{ch}^22a} - \frac{3^3-3}{\text{ch}^23a} + \frac{4^3-4}{\text{ch}^24a} - \frac{5^3-5}{\text{ch}^25a} + \dots \right) = 3 \left( \frac{1}{\text{ch}^4a} - \frac{2}{\text{ch}^42a} + \frac{3}{\text{ch}^43a} - \frac{4}{\text{ch}^44a} + \dots \right) \quad \text{---M}$$

$$(a \neq 0)$$

$$4 \left( \frac{1^4}{\text{ch}^2 a} + \frac{2^4}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{ch}^2 4a} + \dots \right)$$

$$= \frac{\text{sh} 2a(\text{ch} 2a + 5)}{\text{sh}^6 a} - \frac{2\text{sh} 4a(\text{ch} 4a + 5)}{\text{sh}^6 2a} + \frac{3\text{sh} 6a(\text{ch} 6a + 5)}{\text{sh}^6 3a} - \frac{4\text{sh} 8a(\text{ch} 8a + 5)}{\text{sh}^6 4a} + \dots - N$$

$$(a > 0)$$

\*\*\*\*\*

<第一系列母等式グループから得られた恒等式>

$$\frac{1}{\text{sh}^2 a} - \frac{3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{5}{\text{sh}^2 5a} - \frac{7}{\text{sh}^2 7a} + \dots = \frac{2\text{sh} 2a}{\text{ch}^2 2a} + \frac{4\text{sh} 4a}{\text{ch}^2 4a} + \frac{6\text{sh} 6a}{\text{ch}^2 6a} + \frac{8\text{sh} 8a}{\text{ch}^2 8a} + \dots \text{---①}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{\text{sh}^2 a} + \frac{1}{\text{sh}^2 3a} + \frac{1}{\text{sh}^2 5a} + \frac{1}{\text{sh}^2 7a} + \dots = \frac{2}{\text{sh} 2a} + \frac{4}{\text{sh} 4a} + \frac{6}{\text{sh} 6a} + \frac{8}{\text{sh} 8a} + \dots \text{---②}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1^2}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^2}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^2}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^2}{\text{sh}^2 4a} + \dots = \frac{\text{cha}}{\text{sh}^3 a} + \frac{2\text{ch} 2a}{\text{sh}^3 2a} + \frac{3\text{ch} 3a}{\text{sh}^3 3a} + \frac{4\text{ch} 4a}{\text{sh}^3 4a} + \dots \text{---③}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1^2}{\text{sh}^2 a} - \frac{2^2}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^2}{\text{sh}^2 3a} - \frac{4^2}{\text{sh}^2 4a} + \dots = \frac{\text{sha}}{\text{ch}^3 a} + \frac{2\text{sh} 2a}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3\text{sh} 3a}{\text{ch}^3 3a} + \frac{4\text{sh} 4a}{\text{ch}^3 4a} + \dots \text{---④}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{\text{sh}^2 a} - \frac{2}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3}{\text{sh}^2 3a} - \frac{4}{\text{sh}^2 4a} + \dots = \frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{2}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4}{\text{ch}^2 4a} + \dots \text{---⑤}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1^2}{\text{sh}^2 a} - \frac{3^2}{\text{sh}^2 3a} + \frac{5^2}{\text{sh}^2 5a} - \frac{7^2}{\text{sh}^2 7a} + \dots$$

$$= 2 \left\{ \frac{\text{sh}^2 2a - 1}{\text{ch}^3 2a} + \frac{2(\text{sh}^2 4a - 1)}{\text{ch}^3 4a} + \frac{3(\text{sh}^2 6a - 1)}{\text{ch}^3 6a} + \frac{4(\text{sh}^2 8a - 1)}{\text{ch}^3 8a} + \dots \right\} \text{---⑥}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\text{sha}} + \frac{2}{\text{sh} 2a} + \frac{3}{\text{sh} 3a} + \frac{4}{\text{sh} 4a} + \dots$$

$$= \text{sha} \left\{ \frac{2\text{sh} 2a}{(\text{ch} 2a - \text{cha})^2} + \frac{4\text{sh} 4a}{(\text{ch} 4a - \text{cha})^2} + \frac{6\text{sh} 6a}{(\text{ch} 6a - \text{cha})^2} + \frac{8\text{sh} 8a}{(\text{ch} 8a - \text{cha})^2} + \dots \right\} \text{---⑦}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{\text{sh}^2 a} + \frac{3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{5}{\text{sh}^2 5a} + \frac{7}{\text{sh}^2 7a} + \dots = \frac{2\text{ch}2a}{\text{sh}^2 2a} + \frac{4\text{ch}4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{6\text{ch}6a}{\text{sh}^2 6a} + \frac{8\text{ch}8a}{\text{sh}^2 8a} + \dots \quad \text{---⑧}$$

(a ≠ 0)

$$2\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}^3 a} + \frac{3\text{ch}3a}{\text{sh}^3 3a} + \frac{5\text{ch}5a}{\text{sh}^3 5a} + \frac{7\text{ch}7a}{\text{sh}^3 7a} + \dots\right) = \frac{2^2\text{ch}2a}{\text{sh}^2 2a} + \frac{4^2\text{ch}4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{6^2\text{ch}6a}{\text{sh}^2 6a} + \frac{8^2\text{ch}8a}{\text{sh}^2 8a} + \dots \quad \text{---⑨}$$

(a > 0)

$$\frac{\text{cha}}{\text{sh}^3 a} - \frac{2^2\text{ch}2a}{\text{sh}^3 2a} + \frac{3^2\text{ch}3a}{\text{sh}^3 3a} - \frac{4^2\text{ch}4a}{\text{sh}^3 4a} + \dots = \frac{\text{sha}}{\text{ch}^3 a} + \frac{2^2\text{sh}2a}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3^2\text{sh}3a}{\text{ch}^3 3a} + \frac{4^2\text{sh}4a}{\text{ch}^3 4a} + \dots \quad \text{---⑩}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{1}{\text{ch}^2 2a} + \frac{1}{\text{ch}^2 3a} + \frac{1}{\text{ch}^2 4a} + \dots$$

$$= 8\text{sh}^2 a \left\{ \frac{1}{(\text{ch}4a - \text{ch}2a)\text{th}2a} + \frac{2}{(\text{ch}8a - \text{ch}2a)\text{th}4a} + \frac{3}{(\text{ch}12a - \text{ch}2a)\text{th}6a} + \frac{4}{(\text{ch}16a - \text{ch}2a)\text{th}8a} + \dots \right\} \quad \text{---⑪}$$

(a > 0)

$$\frac{\text{ch}b}{\text{sh}^2 a} + \frac{2\text{ch}2b}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3\text{ch}3b}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4\text{ch}4b}{\text{sh}^2 4a} + \dots$$

$$= \frac{2(\text{ch}2a \cdot \text{ch}b - 1)}{(\text{ch}2a - \text{ch}b)^2} + \frac{4(\text{ch}4a \cdot \text{ch}b - 1)}{(\text{ch}4a - \text{ch}b)^2} + \frac{6(\text{ch}6a \cdot \text{ch}b - 1)}{(\text{ch}6a - \text{ch}b)^2} + \frac{8(\text{ch}8a \cdot \text{ch}b - 1)}{(\text{ch}8a - \text{ch}b)^2} + \dots \quad \text{---⑫}$$

(|b| < |2a|)

$$\frac{\text{sh}b}{\text{sh}^2 a} + \frac{2\text{sh}2b}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3\text{sh}3b}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4\text{sh}4b}{\text{sh}^2 4a} + \dots$$

$$= \text{sh}b \left\{ \frac{2\text{sh}2a}{(\text{ch}2a - \text{ch}b)^2} + \frac{4\text{sh}4a}{(\text{ch}4a - \text{ch}b)^2} + \frac{6\text{sh}6a}{(\text{ch}6a - \text{ch}b)^2} + \frac{8\text{sh}8a}{(\text{ch}8a - \text{ch}b)^2} + \dots \right\} \quad \text{---⑬}$$

(a > 0, |b| < 2a)

$$\frac{\text{sh}^2 b}{\text{sh}^2 a} + \frac{\text{sh}^2 2b}{\text{sh}^2 2a} + \frac{\text{sh}^2 3b}{\text{sh}^2 3a} + \frac{\text{sh}^2 4b}{\text{sh}^2 4a} + \dots$$

$$= 2\text{sh}^2 b \left\{ \frac{1}{(\text{ch}2a - \text{ch}2b)\text{th}a} + \frac{2}{(\text{ch}4a - \text{ch}2b)\text{th}2a} + \frac{3}{(\text{ch}6a - \text{ch}2b)\text{th}3a} + \frac{4}{(\text{ch}8a - \text{ch}2b)\text{th}4a} + \dots \right\} \quad \text{---⑭}$$

(a > 0, |b| < a)

$$\frac{1}{\text{ch}2a - \text{ch}0} + \frac{2}{\text{ch}3a - \text{ch}a} + \frac{3}{\text{ch}4a - \text{ch}2a} + \frac{4}{\text{ch}5a - \text{ch}3a} + \dots$$

$$= \frac{\text{sh}2a}{(\text{ch}2a - \text{ch}a)^2} + \frac{2\text{sh}4a}{(\text{ch}4a - \text{ch}a)^2} + \frac{3\text{sh}6a}{(\text{ch}6a - \text{ch}a)^2} + \frac{4\text{sh}8a}{(\text{ch}8a - \text{ch}a)^2} + \dots \quad \text{---⑮}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{(\text{sh}2a-\text{sh}0)^2} + \frac{1}{(\text{sh}3a-\text{sh}a)^2} + \frac{1}{(\text{sh}4a-\text{sh}2a)^2} + \frac{1}{(\text{sh}5a-\text{sh}3a)^2} + \dots$$

$$= \frac{2}{(\text{ch}4a-\text{ch}2a)\text{th}2a} + \frac{4}{(\text{ch}8a-\text{ch}2a)\text{th}4a} + \frac{6}{(\text{ch}12a-\text{ch}2a)\text{th}6a} + \frac{8}{(\text{ch}16a-\text{ch}2a)\text{th}8a} + \dots \text{---(16)}$$

(a > 0)

$$\frac{3^3-3}{\text{sh}^2 3a} - \frac{5^3-5}{\text{sh}^2 5a} + \frac{7^3-7}{\text{sh}^2 7a} - \frac{9^3-9}{\text{sh}^2 9a} + \dots = 6 \left( \frac{2\text{sh}2a}{\text{ch}^4 2a} + \frac{4\text{sh}4a}{\text{ch}^4 4a} + \frac{6\text{sh}6a}{\text{ch}^4 6a} + \frac{8\text{sh}8a}{\text{ch}^4 8a} + \dots \right) \text{---(17)}$$

(a > 0)

$$2 \left( \frac{2^3-2}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^3-3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^3-4}{\text{sh}^2 4a} + \frac{5^3-5}{\text{sh}^2 5a} + \dots \right) = 3 \left( \frac{1}{\text{sh}^4 a} + \frac{2}{\text{sh}^4 2a} + \frac{3}{\text{sh}^4 3a} + \frac{4}{\text{sh}^4 4a} + \dots \right) \text{---(18)}$$

(a ≠ 0)

$$2 \left( \frac{2^3-2}{\text{sh}^2 2a} - \frac{3^3-3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^3-4}{\text{sh}^2 4a} - \frac{5^3-5}{\text{sh}^2 5a} + \dots \right) = 3 \left( \frac{1}{\text{ch}^4 a} + \frac{2}{\text{ch}^4 2a} + \frac{3}{\text{ch}^4 3a} + \frac{4}{\text{ch}^4 4a} + \dots \right) \text{---(19)}$$

(a ≠ 0)

$$4 \left( \frac{1^4}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^4}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{sh}^2 4a} + \dots \right)$$

$$= \frac{\text{sh}2a(\text{ch}2a+5)}{\text{sh}^6 a} + \frac{2\text{sh}4a(\text{ch}4a+5)}{\text{sh}^6 2a} + \frac{3\text{sh}6a(\text{ch}6a+5)}{\text{sh}^6 3a} + \frac{4\text{sh}8a(\text{ch}8a+5)}{\text{sh}^6 4a} + \dots \text{---(20)}$$

(a > 0)

=====

I ~ Nが今回新たに見出したものである。これらもゼータの香りが漂っている。

ここで冒頭で見たものとは異なる別のペア (Dと④) を眺めよう。

$$\frac{1^2}{\text{ch}^2 a} - \frac{2^2}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^2}{\text{ch}^2 3a} - \frac{4^2}{\text{ch}^2 4a} + \dots = \frac{\text{sha}}{\text{ch}^3 a} - \frac{2\text{sh}2a}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3\text{sh}3a}{\text{ch}^3 3a} - \frac{4\text{sh}4a}{\text{ch}^3 4a} + \dots \text{---D}$$

(a > 0)

$$\frac{1^2}{\text{sh}^2 a} - \frac{2^2}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^2}{\text{sh}^2 3a} - \frac{4^2}{\text{sh}^2 4a} + \dots = \frac{\text{sha}}{\text{ch}^3 a} + \frac{2\text{sh}2a}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3\text{sh}3a}{\text{ch}^3 3a} + \frac{4\text{sh}4a}{\text{ch}^3 4a} + \dots \text{---(4)}$$

(a > 0)

左辺の sh (sinh) と ch (cosh) を入れ換えても右辺はほとんど変わらない。まったく素晴らしい秩序が存在している。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

● さらに別の対であるNと⑳を並べよう。

$$4\left(\frac{1^4}{\operatorname{ch}^2 a} + \frac{2^4}{\operatorname{ch}^2 2a} + \frac{3^4}{\operatorname{ch}^2 3a} + \frac{4^4}{\operatorname{ch}^2 4a} + \dots\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2a(\operatorname{ch} 2a+5)}{\operatorname{sh}^6 a} - \frac{2\operatorname{sh} 4a(\operatorname{ch} 4a+5)}{\operatorname{sh}^6 2a} + \frac{3\operatorname{sh} 6a(\operatorname{ch} 6a+5)}{\operatorname{sh}^6 3a} - \frac{4\operatorname{sh} 8a(\operatorname{ch} 8a+5)}{\operatorname{sh}^6 4a} + \dots - N$$

(a > 0)

$$4\left(\frac{1^4}{\operatorname{sh}^2 a} + \frac{2^4}{\operatorname{sh}^2 2a} + \frac{3^4}{\operatorname{sh}^2 3a} + \frac{4^4}{\operatorname{sh}^2 4a} + \dots\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2a(\operatorname{ch} 2a+5)}{\operatorname{sh}^6 a} + \frac{2\operatorname{sh} 4a(\operatorname{ch} 4a+5)}{\operatorname{sh}^6 2a} + \frac{3\operatorname{sh} 6a(\operatorname{ch} 6a+5)}{\operatorname{sh}^6 3a} + \frac{4\operatorname{sh} 8a(\operatorname{ch} 8a+5)}{\operatorname{sh}^6 4a} + \dots \text{---} \textcircled{20}$$

(a > 0)

このペアも、左辺の ch を sh に（逆でも同じ）置き換えても、右辺はほとんど（符号以外は）変わらないことがわかる。

まだまだ多くのペアでこの素晴らしい規則が出ているので、読者自ら見つけてほしい。

この規則を、sinh-cosh 置換に対する保型則と名付けることにしたい。

● 上記二式は長く複雑な計算・変形を経て得られた式だが、その最終形が上記のような簡潔な関係になっているというのは、驚くべきことと思われ、考えれば考えるほどふしぎである。

その理由はさっぱりわからないが、なにかあるということだけわかる。

● Eと⑦については、sinh-cosh 置換に対する保型則は成り立っていないように見える。しかし、別方向から出る式で成り立つことが分かっており、それはおいおい示していく。

おそらく母等式グループは、第三系列、第四系列まで構成できるような気がしていて、そこまでいってそのことがきちんと示せると思う。

=====

2023. 5. 20 杉岡幹生

<参考文献>

・「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)