＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１２＞

ここ何回か（派生式その６～その１１）で見出した恒等式はある母等式グループに属するものであった。よく調べていくと、さらに別種の母等式グループが存在していることが分かってきた。前者を“第一系列母等式グループ”、後者を“第二系列母等式グループ”と名付けると、後者の第二系列からも新しい式が得られていくことが分かった。

今回、その第二系列のグループにおいて新たに見出した八つの恒等式を紹介することにしたい。それらを下記Ａ～Ｈで示した。比較の意味でその後ろにこれまでの第一系列の結果（①～⑳）も並べた。

第一系列のある式と第二系列のある式は対称的な対（ペア）を形成しているものが多い。そこには双対性とでもいうべき美しい性質が現れているように思う。すなわち、片方についてのある公式が成り立つとき、他方についても類似した公式が成り立つというものである。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a や b は任意の実数であり、よって例えば、(a > 0)は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜第二系列母等式グループから得られた恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}-\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}-\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}-\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+-\cdot\cdot \quad \text{----A}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}-\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}-\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+-\cdot\cdot \quad \text{-----B}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3a}-\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}-\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+-\cdot\cdot \quad \text{----C}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}-\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}-\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}-\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+-\cdot\cdot \quad \text{----D}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\mathrm{ch}a-1}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^2}-\frac{2(\mathrm{ch}4a\cdot\mathrm{ch}a-1)}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{3(\mathrm{ch}6a\cdot\mathrm{ch}a-1)}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^2}-\frac{4(\mathrm{ch}8a\cdot\mathrm{ch}a-1)}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^2}+-\cdot\cdot\right\} \quad \text{----E}$$

$(a\neq 0)$

$$2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{5\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^3 5a}+\frac{7\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^3 7a}+\cdot\cdot\right)=\frac{2^2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}-\frac{4^2\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6^2\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}-\frac{8^2\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+-\cdot\cdot \quad \text{---F}$$

$(a>0)$

$$\frac{\mathrm{ch}b}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2\mathrm{ch}2b}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3b}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4b}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2(\mathrm{ch}2a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}b)^2}-\frac{4(\mathrm{ch}4a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{6(\mathrm{ch}6a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}b)^2}-\frac{8(\mathrm{ch}8a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}b)^2}+-\cdot\cdot \quad \text{----G}$$

$(|b|<|2a|)$

$$\frac{\mathrm{sh}^2b}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{\mathrm{sh}^2 2b}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{\mathrm{sh}^2 3b}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{\mathrm{sh}^2 4b}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\mathrm{sh}^2b\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}a}-\frac{2}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}2a}+\frac{3}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}3a}-\frac{4}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}4a}+-\cdot\cdot\right\} \quad \text{---H}$$

$(a>0,\ |b|<a)$

****

＜第一系列母等式グループから得られた恒等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2a}-\frac{2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}^2 2a-1}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{2(\mathrm{sh}^2 4a-1)}{\mathrm{ch}^3 4a}+\frac{3(\mathrm{sh}^2 6a-1)}{\mathrm{ch}^3 6a}+\frac{4(\mathrm{sh}^2 8a-1)}{\mathrm{ch}^3 8a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑥}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sh}a\left\{\frac{2\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑦}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\frac{8\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$(a \neq 0)$

$$2\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{5\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}^3 5a}+\frac{7\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}^3 7a}+\cdot\cdot\right)=\frac{2^2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{4^2\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6^2\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\frac{8^2\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{---⑨}$$

$(a > 0)$

$$\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}-\frac{2^2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3^2\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}-\frac{4^2\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2^2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3^2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4^2\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{---⑩}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=8\mathrm{sh}^2 a\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}2a}+\frac{2}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}4a}+\frac{3}{(\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}6a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}8a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---⑪}$$

$(a > 0)$

$$\frac{\mathrm{ch}b}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2\mathrm{ch}2b}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3b}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4b}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2(\mathrm{ch}2a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{4(\mathrm{ch}4a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{6(\mathrm{ch}6a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{8(\mathrm{ch}8a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}b)^2}+\cdot\cdot \quad \text{----⑫}$$

$(|b| < |2a|)$

$$\frac{\mathrm{sh}b}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2\mathrm{sh}2b}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3b}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4b}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sh}b\left\{\frac{2\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}b)^2}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑬}$$

$(a > 0,\ |b| < 2a)$

$$\frac{\mathrm{sh}^2 b}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{\mathrm{sh}^2 2b}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{\mathrm{sh}^2 3b}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{\mathrm{sh}^2 4b}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\mathrm{sh}^2 b\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}a}+\frac{2}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}2a}+\frac{3}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}3a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}4a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---⑭}$$

$(a>0,\ |b|<\ a)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}0}+\frac{2}{\mathrm{ch}3a-\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}5a-\mathrm{ch}3a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{2\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{3\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{4\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\cdot \quad \text{-----⑮}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{(\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}0)^2}+\frac{1}{(\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}a)^2}+\frac{1}{(\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{1}{(\mathrm{sh}5a-\mathrm{sh}3a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}2a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}4a}+\frac{6}{(\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}6a}+\frac{8}{(\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}8a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑯}$$

$(a>0)$

$$\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^2 7a}-\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^2 9a}+-\cdot\cdot=6\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^4 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^4 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^4 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^4 8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----⑰}$$

$(a>0)$

$$2\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^4 a}+\frac{2}{\mathrm{sh}^4 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^4 3a}+\frac{4}{\mathrm{sh}^4 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---⑱}$$

$(a\neq 0)$

$$2\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}-\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}-\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+-\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^4 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^4 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^4 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^4 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---⑲}$$

$(a\neq 0)$

$$4\left(\frac{1^4}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^4}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^4}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\frac{\mathrm{sh}2a(\mathrm{ch}2a+5)}{\mathrm{sh}^6 a}+\frac{2\mathrm{sh}4a(\mathrm{ch}4a+5)}{\mathrm{sh}^6 2a}+\frac{3\mathrm{sh}6a(\mathrm{ch}6a+5)}{\mathrm{sh}^6 3a}+\frac{4\mathrm{sh}8a(\mathrm{ch}8a+5)}{\mathrm{sh}^6 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑳}$$

$(a>0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Ａ～Ｈが今回新たに見出したものである。いずれもゼータの香りが漂っている。

なお、Excel マクロでいろいろな値を代入して数値検証も行ったが、すべて正しい結果となった。左辺と右辺は同じ値に収束する。

　第二系列のある式は、第一系列のある式と双対的な関係（ペア）になっている。両者において、左辺の ch を sh に置き換えても（逆でもＯＫ）、右辺は非常に似たものになっている。

　例えばＡと①を見てみよう（下記参照）。左辺の ch を sh に（逆でも同じ）置き換えたとしても、右辺はほとんど（符号以外は）変化しないことがわかる。Ａと①は双対的な関係になっている。

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}-\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}-\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+-\cdot\cdot \quad \text{----A}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$$(a>0)$$

　さて、Ａ～Ｈの導出の過程をこれまでに書いたものに追記する形で粗く書いておく。
ただし、それは自分自身の整理の意味で、自身のノートでの独自の記法を交えて書いたものであり、読者にはわかりにくいものとなっていることをお断りしておく。

　***

＜導出の方法（粗筋）＞

　①～⑳とＡ～Ｈは、１１年前に双曲線ゼータを見つけた折の研究の発展版であり、その延長線上に見出した式である。ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)、ファン・ネス彗星　その２ (biglobe.ne.jp)

　そこで行った“ある特殊な方法”を一般化し、そこから得られた等式(x が変数、a が定数)を a で微分(or 積分)して最終の母等式が得られた。その過程は（その２１３）で流れだけ示した。

　二つの母等式のグループが存在する。第一系列母等式グループと第二系列母等式グループの二つである。
　それぞれの母等式グループは、最終の母等式を五つ含んでいて、それら五つのものには、sin フーリエ級数版と cos フーリエ級数版がある（それらの最終の母等式はノートで”①a び[フ]”、”②a び[フ]”、”③a び[フ]”、”$\boxed{1}$a び[フ]”、”$\boxed{2}$a び[フ]”と名付けた五式）。それらは x が変数、a が定数という体裁を一応とっているが、a での微分、積分も自由にでき、結局、2 変数の式になっている。
　そして①～⑳は第一系列母等式グループから得られていく。Ａ～Ｈは第二系列母等式グループから得られていく。

　例えば、第一系列の場合を見ていくと以下となる。
　それぞれの最終の母等式に対し、x に色々な値（0 やπ/2 など）を代入して①～⑧を得た（⑧は⑤から簡単に出るので、両者は同値）。⑨と⑩は、それぞれ②と⑤を a について微分して得られた。
　⑪は③a び[フ]の x に ai（i：虚数単位）を代入して得られた。⑫は$\boxed{1}$a び[フ]の x に bi を代入して、⑬は①a び[フ]の x に bi を代入して、そして⑭は③a び[フ]の x に bi を代入して得られた。

⑮と⑯は、公式 shx・shy＝{ch(x+y)−ch(x−y)}/2 や shx・chy＝{sh(x+y)+sh(x−y)}/2 を使うことで簡単に得られる。⑮は上記公式を使って⑦から出る。あるいは一般式の⑬の b を a に置き換えても（⑦を経由して）出る。⑯は上記公式を使って⑪から出る。あるいは一般式の⑭の b を a/2 に置き換えても（⑪を経由して）出る。

よって、⑦と⑮は⑬の特別な場合の式、⑪と⑯は⑭の特別な場合の式となっている。

⑰は、①a び[フ][x2 回び]という変形母等式の x にπ/2 を代入して得られる。
⑱は、□2a び[フ][x1 回び]という変形母等式の x に 0 を代入して得られる。
⑲は、□2a び[フ][x1 回び]という変形母等式の x にπ/2 を代入して得られる。
⑳は、②a び[フ][x2 回び]という変形母等式の x に 0 を代入して得られる。

第二系列のＡ～Ｈの場合も、第一系列と同様にして第二系列母等式グループから求まっていく。
以上。
****

導出はこのような感じのものとなる。このようなかなり込み入った状況から恒等式が得られていく。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●上記で見たＡと①以外でももう一つ双対性を見ておこう。Ｂと②を並べる。

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}-\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}-\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+-\cdot\cdot \qquad \text{-----B}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \qquad \text{----②}$$

$$(a>0)$$

左辺の ch を sh に（逆でも OK）置き換えるという操作を行った場合でも、右辺はほとんど（符号以外は）変わらないことがわかる。なんともふしぎである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.5.14　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)