# ＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１１＞

さらに新たに四つの恒等式を見出したので、これまでのものと一緒に以下に⑰～⑳として示す。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a や b は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}^2 2a-1}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{2(\mathrm{sh}^2 4a-1)}{\mathrm{ch}^3 4a}+\frac{3(\mathrm{sh}^2 6a-1)}{\mathrm{ch}^3 6a}+\frac{4(\mathrm{sh}^2 8a-1)}{\mathrm{ch}^3 8a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑥}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{2}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}3\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{sh}4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sha}\left\{\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}2\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}4\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}6\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}8\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑦}$$

$(\mathrm{a}>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{ch}6\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{ch}8\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$(\mathrm{a}\neq 0)$

$$2\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}+\frac{5\mathrm{ch}5\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 5\mathrm{a}}+\frac{7\mathrm{ch}7\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)=\frac{2^2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4^2\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6^2\mathrm{ch}6\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8^2\mathrm{ch}8\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{---⑨}$$

$(\mathrm{a}>0)$

$$\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}-\frac{2^2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3^2\mathrm{ch}3\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}-\frac{4^2\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 4\mathrm{a}}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}^3\mathrm{a}}+\frac{2^2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3^2\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4^2\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{---⑩}$$

$(\mathrm{a}\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=8\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}4\mathrm{a}-\mathrm{ch}2\mathrm{a})\mathrm{th}2\mathrm{a}}+\frac{2}{(\mathrm{ch}8\mathrm{a}-\mathrm{ch}2\mathrm{a})\mathrm{th}4\mathrm{a}}+\frac{3}{(\mathrm{ch}12\mathrm{a}-\mathrm{ch}2\mathrm{a})\mathrm{th}6\mathrm{a}}+\frac{4}{(\mathrm{ch}16\mathrm{a}-\mathrm{ch}2\mathrm{a})\mathrm{th}8\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---⑪}$$

$(\mathrm{a}>0)$

$$\frac{\mathrm{chb}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{b}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch}3\mathrm{b}}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{b}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2(\mathrm{ch}2\mathrm{a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch}2\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{4(\mathrm{ch}4\mathrm{a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch}4\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{6(\mathrm{ch}6\mathrm{a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch}6\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{8(\mathrm{ch}8\mathrm{a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch}8\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\cdot\cdot \quad \text{----⑫}$$

$(|\mathrm{b}|<|2\mathrm{a}|)$

$$\frac{\mathrm{shb}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{b}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{sh}3\mathrm{b}}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{b}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{shb}\left\{\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}2\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}4\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}6\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}8\mathrm{a}-\mathrm{chb})^2}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑬}$$

$(\mathrm{a}>0,\ |\mathrm{b}|<2\mathrm{a})$

$$\frac{\mathrm{sh}^2 b}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{\mathrm{sh}^2 2b}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{\mathrm{sh}^2 3b}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{\mathrm{sh}^2 4b}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\mathrm{sh}^2 b\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}a}+\frac{2}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}2a}+\frac{3}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}3a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}4a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---⑭}$$

$(a>0,\ |b|<\ a)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}0}+\frac{2}{\mathrm{ch}3a-\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}5a-\mathrm{ch}3a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{2\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{3\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{4\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\cdot \quad \text{------⑮}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{(\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}0)^2}+\frac{1}{(\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}a)^2}+\frac{1}{(\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{1}{(\mathrm{sh}5a-\mathrm{sh}3a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}2a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}4a}+\frac{6}{(\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}6a}+\frac{8}{(\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}8a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑯}$$

$(a>0)$

$$\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^2 7a}-\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^2 9a}+-\cdot\cdot=6\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^4 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^4 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^4 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^4 8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----⑰}$$

$(a>0)$

$$2\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^4 a}+\frac{2}{\mathrm{sh}^4 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^4 3a}+\frac{4}{\mathrm{sh}^4 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---⑱}$$

$(a\neq 0)$

$$2\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}-\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}-\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+-\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^4 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^4 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^4 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^4 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---⑲}$$

$(a\neq 0)$

$$4\left(\frac{1^4}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^4}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^4}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\frac{\mathrm{sh}2a(\mathrm{ch}2a+5)}{\mathrm{sh}^6 a}+\frac{2\mathrm{sh}4a(\mathrm{ch}4a+5)}{\mathrm{sh}^6 2a}+\frac{3\mathrm{sh}6a(\mathrm{ch}6a+5)}{\mathrm{sh}^6 3a}+\frac{4\mathrm{sh}8a(\mathrm{ch}8a+5)}{\mathrm{sh}^6 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑳}$$

$(a>0)$

==============================

最後の⑰から⑳が今回新たに見出したものである。いずれもゼータの香りが漂っている。

⑰～⑲は一風変わった形をしていて面白い。⑱と⑲は対称的にきれいな対を成している。

これら四式の導出の過程を、前々回と前回で書いたものに追記する形で粗く書いておく。ただし、それは自分自身の整理の意味で、自身のノートでの独自の記法を交えて書いたものであり、読者にはわかりにくいものとなっていることをお断りしておく。

*************************************************************

## ＜導出の方法（粗筋）＞

①～⑳は、１１年前に双曲線ゼータを見つけた折の研究の発展版であり、その延長線上に見出した式である。ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)、ファン・ネス彗星　その２ (biglobe.ne.jp)

そこで行った“ある特殊な方法”つまり「ある母関数に対し“あるフーリエ級数”を適用する手法」を一般化し、そこから得られた等式(x が変数、a が定数)を a で微分(or 積分)して最終の母等式が得られた。その過程は（その２１３）で流れだけ示した。

その最終の母等式は五つあって、sin フーリエ級数版と cos フーリエ級数版がある（それらの最終の母等式はノートで”①a び[フ]”、”②a び[フ]”、”③a び[フ]”、”$\boxed{1}$a び[フ]”、”$\boxed{2}$a び[フ]”と名付けた五式）。それらは x が変数、a が定数という体裁を一応とっているが、a での微分、積分も自由にでき、結局、2 変数という感じの式になっている。

そのそれぞれの最終の母等式に対し、x に色々な値（0 やπ/2 など）を代入して①～⑧を得た（⑧は⑤から簡単に出る。よって両者は同値）。⑨と⑩は、それぞれ②と⑤を a について微分して得られた。

⑪は③a び[フ]の x に ai（i：虚数単位）を代入して得られた。⑫は$\boxed{1}$a び[フ]の x に bi を代入して、⑬は①a び[フ]の x に bi を代入して、そして⑭は③a び[フ]の x に bi を代入して得られた。

⑮と⑯は、公式 shx・shy＝{ch(x+y)−ch(x−y)}/2 や shx・chy＝{sh(x+y)+sh(x−y)}/2 を使うことで簡単に得られる。⑮は上記公式を使って⑦から出る。あるいは一般式の⑬の b を a に置き換えても（⑦を経由して）出る。⑯は上記公式を使って⑪から出る。あるいは一般式の⑭の b を a/2 に置き換えても（⑪を経由して）出る。

よって、⑦と⑮は⑬の特別な場合の式、⑪と⑯は⑭の特別な場合の式となっている。

⑰は、①a び[フ][x2 回び]という変形母等式の x にπ/2 を代入して得られる。

⑱は、$\boxed{2}$a び[フ][x1 回び]という変形母等式の x に 0 を代入して得られる。

⑲は、$\boxed{2}$a び[フ][x1 回び]という変形母等式の x にπ/2 を代入して得られる。

⑳は、②a び[フ][x2 回び]という変形母等式の x に 0 を代入して得られる。

以上。

*************************************************************

導出はこのような感じのものとなる。

基本となる最終の母等式が五つもあって（しかも二変数)、それをさらに何回も x で微分したり(or a で微分したり)して新たな変形母等式を出し、それらを用いて出している。このようなかなり複雑な状況から式が得られていく。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ①から⑩までは割合すんなり得ることができた。それはある洞窟に入ると、輝く鉱石がいっぱい地面に落ちていたという状況に似ている。足元に落ちているので拾うだけであり、簡単である。
⑪以降は、目につくところに鉱石はなく、自分で掘って出したという感じである。もっと掘ればまだ出てくるはずだが、だんだんと掘るのが（計算が）しんどくなってきた。

● 数学の研究というのは、私の場合はいつも上記のような感じである。人が入っていない洞窟を見つけたら、足元に鉱石が落ちていて簡単に拾うことができる。だから最初はばたばたと結果が得られる。しかしそれは長く続かず、表面のものを拾い尽くすと、そこからしんどい。

● ③と④、⑧と①、そして⑱と⑲を並べよう。

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\frac{8\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+-\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$$(a>0)$$

$$2\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^4 a}+\frac{2}{\mathrm{sh}^4 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^4 3a}+\frac{4}{\mathrm{sh}^4 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---⑱}$$

$$(a\neq 0)$$

$$2\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}-\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}-\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+-\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^4 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^4 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^4 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^4 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---⑲}$$

$$(a\neq 0)$$

これらは美しい対を成している！ 単独でもきれいだが、ペアで見ると美しさが一層際立つ。

● ⑰再掲。

$$\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^2 7a}-\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^2 9a}+-\cdot\cdot=6\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^4 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^4 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^4 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^4 8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----⑰}$$

$$(a>0)$$

この式の相棒はいないのだろうか。いまのところ見つかっていない。

一つ上での式たちを見ると、「いるはず」と思うのだが。。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.5.4　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)