＜ 双曲線ゼータとその派生式 その１０＞

前回新たに見出した式を四つ加えて①～⑭の等式（恒等式）を羅列した。今回は、新たに見出したものではないが、⑦と⑪をさらに変形して興味ある形の式が二つ出たので、それを⑮、⑯として下記に示す。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a や b は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}^2 2a-1}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{2(\mathrm{sh}^2 4a-1)}{\mathrm{ch}^3 4a}+\frac{3(\mathrm{sh}^2 6a-1)}{\mathrm{ch}^3 6a}+\frac{4(\mathrm{sh}^2 8a-1)}{\mathrm{ch}^3 8a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑥}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sha}\left\{\frac{2\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{4\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{6\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{8\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha})^2}+\cdot\cdot\right\} \quad ----⑦$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch2a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch4a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{ch6a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{ch8a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad ----⑧$$

$(a\neq 0)$

$$2\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}+\frac{5\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh}^3 5\mathrm{a}}+\frac{7\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh}^3 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)=\frac{2^2\mathrm{ch2a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4^2\mathrm{ch4a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6^2\mathrm{ch6a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8^2\mathrm{ch8a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad ---⑨$$

$(a>0)$

$$\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}-\frac{2^2\mathrm{ch2a}}{\mathrm{sh}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3^2\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}-\frac{4^2\mathrm{ch4a}}{\mathrm{sh}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}^3\mathrm{a}}+\frac{2^2\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3^2\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4^2\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad ----⑩$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=8\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{ch2a})\mathrm{th2a}}+\frac{2}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{ch2a})\mathrm{th4a}}+\frac{3}{(\mathrm{ch12a}-\mathrm{ch2a})\mathrm{th6a}}+\frac{4}{(\mathrm{ch16a}-\mathrm{ch2a})\mathrm{th8a}}+\cdot\cdot\right\} \quad ---⑪$$

$(a>0)$

$$\frac{\mathrm{chb}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{ch2b}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch3b}}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch4b}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2(\mathrm{ch2a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch2a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{4(\mathrm{ch4a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{6(\mathrm{ch6a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch6a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{8(\mathrm{ch8a}\cdot\mathrm{chb}-1)}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{chb})^2}+\cdot\cdot \quad ---⑫$$

$(|b|<|2a|)$

$$\frac{\mathrm{shb}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sh2b}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{sh3b}}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh4b}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{shb}\left\{\frac{2\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{4\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{6\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}-\mathrm{chb})^2}+\frac{8\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{chb})^2}+\cdot\cdot\right\} \quad ----⑬$$

$(a>0,\ |b|<2a)$

$$\frac{sh^2 b}{sh^2 a}+\frac{sh^2 2b}{sh^2 2a}+\frac{sh^2 3b}{sh^2 3a}+\frac{sh^2 4b}{sh^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2sh^2 b\left\{\frac{1}{(ch2a-ch2b)tha}+\frac{2}{(ch4a-ch2b)th2a}+\frac{3}{(ch6a-ch2b)th3a}+\frac{4}{(ch8a-ch2b)th4a}+\cdot\cdot\right\} \quad ---⑭$$

$(a>0,\ |b|<a)$

$$\frac{1}{ch2a-ch0}+\frac{2}{ch3a-cha}+\frac{3}{ch4a-ch2a}+\frac{4}{ch5a-ch3a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^2}+\frac{2sh4a}{(ch4a-cha)^2}+\frac{3sh6a}{(ch6a-cha)^2}+\frac{4sh8a}{(ch8a-cha)^2}+\cdot\cdot \quad ----⑮$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{(sh2a-sh0)^2}+\frac{1}{(sh3a-sha)^2}+\frac{1}{(sh4a-sh2a)^2}+\frac{1}{(sh5a-sh3a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2}{(ch4a-ch2a)th2a}+\frac{4}{(ch8a-ch2a)th4a}+\frac{6}{(ch12a-ch2a)th6a}+\frac{8}{(ch16a-ch2a)th8a}+\cdot\cdot \quad ----⑯$$

$(a>0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最後の⑮と⑯が今回加えた式である。両者とも興味深い形をしている。

規則性を強調するために、⑮の ch0 は 1 だが、あえて ch0 とした。⑯の sh0 は 0 だが、あえて sh0 とした。

導出の方法に関して、両式は shx・shy＝{ch(x+y)−ch(x−y)}/2 や shx・chy＝{sh(x+y)+sh(x−y)}/2 を使って簡単に得られる。

⑮は⑦から出る。あるいは一般式の⑬の b を a に置き換えても（⑦を経由して）得られる。

⑯は⑪から出る。あるいは一般式の⑭の b を a/2 に置き換えても（⑪を経由して）得られる。

このように⑮、⑯はそれぞれ⑬、⑭の特別な場合の式となっている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ①～⑯は、不思議な感じの式であり、地下に潜むなんらかの構造を予感させてくれる。眺めるだけで幸福感に浸ることができる式となっている。だから、何かに役立つとかそのようなことはあまり関心がない。それはラマヌジャンが出した幾多の不思議な式を鑑賞するのと同じ感覚といえる。

● ラマヌジャン式との関連で言えば、１１年前に私は次の関係を見出していた。

[ファン・ネス彗星　その２ (biglobe.ne.jp)]

$$1/(\sinh(\pi))^2 + 1/(\sinh(2\pi))^2 + 1/(\sinh(3\pi))^2 + \cdots = 1/6 - 1/(2\pi)$$

$$1/(\sinh(\pi))^4 + 1/(\sinh(2\pi))^4 + 1/(\sinh(3\pi))^4 + \cdots = 1/(3\pi) - 11/90 + (\omega/\pi)^4/30$$

$$1/(\sinh(\pi))^6 + 1/(\sinh(2\pi))^6 + 1/(\sinh(3\pi))^6 + \cdots = 191/1890 - 4/(15\pi) - (\omega/\pi)^4/30$$

ラマヌジャン式とsinhZ(s)との関係は以下の通り。$\mathrm{sinhZ}(s)=1/(\sinh(\pi))^s + 1/(\sinh(2\pi))^s + 1/(\sinh(3\pi))^s + \cdots$

$$1/(e^{(2\pi)}-1) + 2/(e^{(4\pi)}-1) + 3/(e^{(6\pi)}-1) + \cdots = (1/4)\mathrm{sinhZ}(2)$$

$$1^3/(e^{(2\pi)}-1) + 2^3/(e^{(4\pi)}-1) + 3^3/(e^{(6\pi)}-1) + \cdots = (1/4)\mathrm{sinhZ}(2) + (3/8)\mathrm{sinhZ}(4)$$

$$1^5/(e^{(2\pi)}-1) + 2^5/(e^{(4\pi)}-1) + 3^5/(e^{(6\pi)}-1) + \cdots = (1/4)\mathrm{sinhZ}(2) + (15/8)\mathrm{sinhZ}(4) + (15/8)\mathrm{sinhZ}(6)$$

sinhZ(s)を双曲線ゼータとして上記のように定義した。これを見ても、sinhZ(s)は地下深くで大事なものとつながっていると思う。なお、上記のωはレムニスケート周率であり、円周率の類似物のようなものである。レムニスケート周率は、ガウス、アーベルらの楕円関数論の建築に関係した重要な量である（ガウスはほとんど未発表）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.5.1　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)