＜ 双曲線ゼータとその派生式 その９＞

今年の初めに（その２７７）で以下の①～⑩の等式（恒等式）を見出し報告した。見つけたときはふしぎな式だと思ったが、いま見てもふしぎである。

今回さらにいくつかの類似式を見つけたので報告したい。それは下記の＜今回見出した等式＞の⑪～⑭の四式である。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a や b は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{sh}4\mathrm{a}}+\frac{6}{\mathrm{sh}6\mathrm{a}}+\frac{8}{\mathrm{sh}8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}^3\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}-\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}-1}{\mathrm{ch}^3 2\mathrm{a}}+\frac{2(\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}-1)}{\mathrm{ch}^3 4\mathrm{a}}+\frac{3(\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}-1)}{\mathrm{ch}^3 6\mathrm{a}}+\frac{4(\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}-1)}{\mathrm{ch}^3 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑥}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{2}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}3\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{sh}4\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sha}\left\{\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}2\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}4\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}6\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}8\mathrm{a}-\mathrm{cha})^2}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑦}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\frac{8\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+\cdot\cdot \quad ----⑧$$

$(a \neq 0)$

$$2\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{5\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}^3 5a}+\frac{7\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}^3 7a}+\cdot\cdot\right)=\frac{2^2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{4^2\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{6^2\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\frac{8^2\mathrm{ch}8a}{\mathrm{sh}^2 8a}+\cdot\cdot \quad ---⑨$$

$(a > 0)$

$$\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}-\frac{2^2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3^2\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}-\frac{4^2\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2^2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3^2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4^2\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad ----⑩$$

$(a \neq 0)$

＜今回見出した等式＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=8\mathrm{sh}^2 a\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}2a}+\frac{2}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}4a}+\frac{3}{(\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}6a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}2a)\mathrm{th}8a}+\cdot\cdot\right\} \quad ---⑪$$

$(a > 0)$

$$\frac{\mathrm{ch}b}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2\mathrm{ch}2b}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3b}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4b}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{2(\mathrm{ch}2a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{4(\mathrm{ch}4a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{6(\mathrm{ch}6a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{8(\mathrm{ch}8a\cdot\mathrm{ch}b-1)}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}b)^2}+\cdot\cdot \quad ----⑫$$

$(|b| < |2a|)$

$$\frac{\mathrm{sh}b}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2\mathrm{sh}2b}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3b}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4b}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sh}b\left\{\frac{2\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}b)^2}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}b)^2}+\cdot\cdot\right\} \quad ----⑬$$

$(a > 0,\ |b| < 2a)$

$$\frac{\mathrm{sh}^2 b}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{\mathrm{sh}^2 2b}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{\mathrm{sh}^2 3b}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{\mathrm{sh}^2 4b}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\mathrm{sh}^2 b\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}a}+\frac{2}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}2a}+\frac{3}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}3a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}2b)\mathrm{th}4a}+\cdot\cdot\right\} \quad ---⑭$$

$(a > 0,\ |b| < a)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最後の四つが今回見出した式である。⑫～⑭は、二つの任意の定数 a,b が絡まっていることから、他式より内容が豊かになっていると思う。

どの式にもゼータの香りが漂っている。双曲線ゼータの香りとともに、ζ(s)やL(s)の香りが漂っている。優美な式たちであり、得も言われぬ味わいがある。

なお、 Excel でマクロを組んで数値検証も行ったが、正しいものであった。左辺と右辺は同じ値に収束する。収束は速い。

これらの導出方法は、これまでに書いた以下の粗筋で済ますことにする。全部書くと長いものになる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法（粗筋）＞

①～⑭は、１１年前に双曲線ゼータを見つけた折の研究の発展版であり、その延長線上に見出した式である。ファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)、ファン・ネス彗星　その２ (biglobe.ne.jp)

そこで行った「ある母関数に対し“あるフーリエ級数”を適用する手法」を一般化し、そこから得られた等式(x が変数、a が定数)を a で微分(or 積分)して最終の母等式が得られた。その過程は（その２１３）で流れだけ示した。

その最終の母等式は五つあって、sin フーリエ級数版と cos フーリエ級数版がある。それらは x が変数、a が定数という体裁を一応とっているが、a での微分、積分も自由にでき、結局、2 変数という感じの式になっている。

そのそれぞれの最終の母等式に対し、x に色々な値（0 やπ/2 など）を代入して①～⑧を得た（⑧は⑤から簡単に出る）。⑪は x に ai（i：虚数単位）を、⑫～⑭は x に bi を代入して得られた。なお、②と⑤を a について微分して、それぞれ⑨と⑩が得られた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 得られた等式はいくらながめていても飽きない。とくに②と⑤がシンプルで好きである。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \quad \text{-----②}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot \quad \text{-----⑤}$$

$$(a\neq 0)$$

眺めていると、sh○や ch○が単なる数（整数）のように見えてくるからふしぎである。例えば②の左辺などは、$1/1^2$ $+1/3^2$ $+1/5^2$ $+1/7^2$ +・・の類似物のようである。

● １１年前にラマヌジャン式を利用して以下の結果を出していた。ファン・ネス彗星　その２（biglobe.ne.jp）

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\pi}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2\pi}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\pi}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4\pi}+\cdot\cdot=\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi} \qquad \text{----[A]}$$

驚くべきことに、こうなるのである。

このことがあるので②の左辺を奇数でなく自然数に拡張した式を得たいと思うのだが。。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \qquad \text{-----②}$$

● 下式を比べると[A]の方が高級感がある。[B]もふしぎだが、[A]はもっとふしぎである。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\pi}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2\pi}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\pi}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4\pi}+\cdot\cdot=\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi} \qquad \text{---[A]}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{----[B]}$$

●等式は得られたものの、大事なものは地下に隠れている気がする。式の背後には得体のしれない構造があるのだろうけれども、そんなものがつかめるはずはなく、結局、表面にぽつぽつと顔を出す鉱石を拾っているだけである。

●１年半前（その２１２）で下式の成立をカンで予想した（aπを 2a で置き換えたが同じこと）。そして、その成立をきちんと述べていなかったが、上方の＜導出の粗筋＞の式から正しい式とわかった。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{sh^2a}+\frac{1}{sh^2 2a}+\frac{1}{sh^2 3a}+\frac{1}{sh^2 4a}+\cdot\cdot\right\}$$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}-\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}-\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{ch^2a}+\frac{1}{ch^2 2a}+\frac{1}{ch^2 3a}+\frac{1}{ch^2 4a}+\cdot\cdot\right\}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.4.23　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）