＜ L(1)香り式の標準６分割 ＞

（その２８２）でＬ(1)の変５分割を出し、その類似を求めてＬ(1)香り式の変５分割を出そうとしたところ、その途上で先のＬ(1)の変５分割は、実質的にＬ(1)の標準６分割であることに気づいた。私の勘違いがあった。個々の値は間違いなかったが、“変”ではなく“標準”の分割に本質的に等しいものであった。

その途上の導出を修正して、５年前の（その２１）のＬ(1)の標準６分割の類似物とも言える、Ｌ(1)香り式の標準６分割を出したので、今回はそれを示すことにする。

ここで、標準○割とは、このシリーズが始まった５年前からメインでやっている分割のことである。ここ半年でそれから外れた新種の分割も見出してきているが、それとは違う“標準的な”分割を意味する。

まず結果から示す。Ｌ(1)香り式の標準６分割は以下となる。Ｌ(1)香り式（１分割）と、（その２１）のＬ(1)の標準の６分割も一緒に並べた。なお、ch は双曲線関数 cosh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ L(1)香り式（１分割） ＞

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{-----①}$$

a は任意の実数。

＜ L(1)香り式の標準６分割 ＞

$$A1=1/(1^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +25/(25^2+a^2)\ -47/(47^2+a^2)\ +49/(49^2+a^2)\ -71/(71^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/48)\{2\ +2\mathrm{ch}(a\pi/3)\ +2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\ +2\sqrt{3}\mathrm{ch}(a\pi/6)\ +(\sqrt{6}+\sqrt{2})\mathrm{ch}(a\pi/12)\ +(\sqrt{6}-\sqrt{2})\mathrm{ch}(5a\pi/12)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A2=3/(3^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +27/(27^2+a^2)\ -45/(45^2+a^2)\ +51/(51^2+a^2)\ -69/(69^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/48)\{-2\ +4\mathrm{ch}(a\pi/3)\ +2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\ -2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/12)\ +2\sqrt{2}\mathrm{ch}(5a\pi/12)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A3=5/(5^2+a^2)\ -19/(19^2+a^2)\ +29/(29^2+a^2)\ -43/(43^2+a^2)\ +53/(53^2+a^2)\ -67/(67^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/48)\{2\ +2\mathrm{ch}(a\pi/3)\ -2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\ -2\sqrt{3}\mathrm{ch}(a\pi/6)\ +(\sqrt{6}-\sqrt{2})\mathrm{ch}(a\pi/12)\ +(\sqrt{6}+\sqrt{2})\mathrm{ch}(5a\pi/12)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A4=7/(7^2+a^2)\ -17/(17^2+a^2)\ +31/(31^2+a^2)\ -41/(41^2+a^2)\ +55/(55^2+a^2)\ -65/(65^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/48)\{-2\ -2\mathrm{ch}(a\pi/3)\ -2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\ +2\sqrt{3}\mathrm{ch}(a\pi/6)\ +(\sqrt{6}-\sqrt{2})\mathrm{ch}(a\pi/12)\ +(\sqrt{6}+\sqrt{2})\mathrm{ch}(5a\pi/12)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A5=9/(9^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +33/(33^2+a^2)\ -39/(39^2+a^2)\ +57/(57^2+a^2)\ -63/(63^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/48)\{2\ -4\mathrm{ch}(a\pi/3)\ +2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\ -2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/12)\ +2\sqrt{2}\mathrm{ch}(5a\pi/12)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A6=11/(11^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ +35/(35^2+a^2)\ -37/(37^2+a^2)\ +59/(59^2+a^2)\ -61/(61^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/48)\{-2\ -2\mathrm{ch}(a\pi/3)\ +2\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\ -2\sqrt{3}\mathrm{ch}(a\pi/6)\ +(\sqrt{6}+\sqrt{2})\mathrm{ch}(a\pi/12)\ +(\sqrt{6}-\sqrt{2})\mathrm{ch}(5a\pi/12)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

■L(1)６分割（５年前の結果）

$$B1=\ 1\ -1/23\ +1/25\ -1/47\ +1/49\ -1/71\ +\cdots\ =(\pi/24)\tan(11\pi/24)$$

B2＝1/3 -1/21 +1/27 -1/45 +1/51 -1/69 +・・＝(π/24)tan(9π/24)

B3＝1/5 -1/19 +1/29 -1/43 +1/53 -1/67 +・・＝(π/24)tan(7π/24)

B4＝1/7 -1/17 +1/31 -1/41 +1/55 -1/65 +・・ ＝(π/24)tan(5π/24)

B5＝1/9 -1/15 +1/33 -1/39 +1/57 -1/63 +・・ ＝(π/24)tan(3π/24)

B6＝1/11 -1/13 +1/35 -1/37 +1/59 -1/61 +・・ ＝(π/24)tan(π/24)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

標準６分割はこのようなものとなった。

A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6＝(π/4)/ch(aπ/2)＝L(1)香り式（①）となるので、A1,-A2,A3,-A4,A5,-A6 がＬ(1)香り式の６分身である。

また当然 B1 -B2 +B3 -B4 +B5 -B6＝π/4＝L(1)である。B1,-B2,B3,-B4,B5,-B6 がＬ(1)の６分身である。

Ｌ(1)香り式とＬ(1)の６分割が見事に対応していることに注目したい。

なお、Excel で数値検証も行ったが正しいものであった。4000 万項ほど計算した。

導出の方法は概要だけ以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$\sin x/(1^2+a^2)$ $+3\sin 3x/(3^2+a^2)$ $+5\sin 5x/(5^2+a^2)$ $+7\sin 5x/(7^2+a^2)$ +・・＝(π/4)ch(a(π/2-x))/ch(aπ/2)

（0＜x＜π，ａは任意の実数）

上記母等式Ｉのｘに 6π/12、5π/12、4π/12, 3π/12, 2π/12, π/12 を代入して、六式が得られる。それは上方の A1～A6 に関する連立方程式となっている。それを解いて、A1～A6 が得られた。

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして導いた。「6π/12、5π/12、4π/12, 3π/12, 2π/12, π/12 を代入して」は、あえて約分せずに表現した。

A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6＝(π/4)/ch(aπ/2)＝L(1)香り式（①）となるわけであるが、右辺値がきれいに相殺されて(π/4)/ch(aπ/2)に至る様を味わっていただきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●分身の右辺の ch に掛かる√や有数の所は、三角関数でも表現できる。

A1＝(π/48){2 +2ch(aπ/3) +2√2ch(aπ/4) +2√3ch(aπ/6) +(√6+√2)ch(aπ/12) +(√6-√2)ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

例えば、上記は次のようになる。sin は s と略記した。

A1＝(π/12){1/2 +s(π/6)ch(aπ/3) +s(π/4)ch(aπ/4) +s(π/3)ch(aπ/6)+s(5π/12)ch(aπ/12) +s(π/12)ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

●再度、A1 を観察すると、ch()の()内には<導出の方法>で代入したすべての値が出ていることに気づく。

A1＝(π/48){2 +2ch(aπ/3) +2√2ch(aπ/4) +2√3ch(aπ/6) +(√6+√2)ch(aπ/12) +(√6−√2)ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

青字が「上記母等式Ⅰのｘに 6π/12、5π/12、4π/12, 3π/12, 2π/12, π/12 を代入して、・・」の値に対応している。面白いことである。

●ゼータとゼータ香り式を比べて想うこと。

ゼータは平板な世界である。香り式は立体的で奥行きのある世界である。

それは、ゼータが三角関数のみに関係しているのに対し、香り式は三角関数と双曲線関数が絡まった高い対称性をもっているからだと思う。

●A1～A6 を再掲。

A1＝(π/48){2 +2ch(aπ/3) +2√2ch(aπ/4) +2√3ch(aπ/6) +(√6+√2)ch(aπ/12) +(√6−√2)ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

A2＝(π/48){-2 +4ch(aπ/3) +2√2ch(aπ/4) -2√2ch(aπ/12) +2√2ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

A3＝(π/48){2 +2ch(aπ/3) -2√2ch(aπ/4) -2√3ch(aπ/6) +(√6−√2)ch(aπ/12) +(√6+√2)ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

A4＝(π/48){-2 -2ch(aπ/3) -2√2ch(aπ/4) +2√3ch(aπ/6) +(√6−√2)ch(aπ/12) +(√6+√2)ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

A5＝(π/48){2 -4ch(aπ/3) +2√2ch(aπ/4) -2√2ch(aπ/12) +2√2ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

A6＝(π/48){-2 -2ch(aπ/3) +2√2ch(aπ/4) -2√3ch(aπ/6) +(√6+√2)ch(aπ/12) +(√6−√2)ch(5aπ/12)}/ch(aπ/2)

眺めていて「これは行列で表現できるのではないか」と思った。少しやってみた結果、できるとわかった。

ベクトル＝行列×ベクトル

として表せる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.4.8 杉岡幹生