＜ Z(2)の変５分割 ＞

前回からの継続で、Z(2)についてもＬ(1)の類似を辿ることで変５分割が見つかったので、今回はそれを紹介したい。“変５分割”とは新種の５分割というほどの意味である。ここで、Z(2)は、

$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots$

である。それはリーマンゼータ ζ(2)と次の関係にあり、両者は本質的に等しいものである。

$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots$

$=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2\cdots-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdots)$

$=\zeta(2)-\zeta(2)/2^2=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$

なお“Z()”という記号は私が独自に使っているものなので注意されたい。

さて今回見出した変５分割を示すと以下となる。５年前の結果（その３１）と比較した形で示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■Z(2)変５分割

$A1=1+1/23^2+1/25^2+1/47^2+1/49^2+1/71^2+\cdots=(8+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A2=1/11^2+1/13^2+1/35^2+1/37^2+1/59^2+1/61^2+\cdots=(8-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A3=1/3^2+1/9^2+1/15^2+1/21^2+1/27^2+1/33^2+1/39^2+1/45^2+\cdots=\pi^2/72$

$A4=1/5^2+1/19^2+1/29^2+1/43^2+1/53^2+1/67^2+\cdots=(8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A5=1/7^2+1/17^2+1/31^2+1/41^2+1/55^2+1/65^2+\cdots=(8+5\sqrt{2}-4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A1+A2+A3+A4+A5=Z(2)=\pi^2/8$ となる。

■Z(2)５分割 （５年前の結果）

$B1=1+1/19^2+1/21^2+1/39^2+1/41^2+1/59^2+\cdots=(\pi/20)^2/\cos^2(9\pi/20)$

$B2=1/3^2+1/17^2+1/23^2+1/37^2+1/43^2+1/57^2+\cdots=(\pi/20)^2/\cos^2(7\pi/20)$

$B3=1/5^2+1/15^2+1/25^2+1/35^2+1/45^2+1/55^2+\cdots=(\pi/20)^2/\cos^2(5\pi/20)$

$B4=1/7^2+1/13^2+1/27^2+1/33^2+1/47^2+1/53^2+\cdots=(\pi/20)^2/\cos^2(3\pi/20)$

$B5=1/9^2+1/11^2+1/29^2+1/31^2+1/49^2+1/51^2+\cdots=(\pi/20)^2/\cos^2(\pi/20)$

$B1+B2+B3+B4+B5=Z(2)=\pi^2/8$ となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

変５分割はこのようになった。５年前の５分割とは異なる分割であることが見てとれる。

$A1+A2+A3+A4+A5=Z(2)=\pi^2/8$ から、A1, A2, A3, A4, A5 が変５分身となる。Excel で 8000 万項ほど計算し左辺は右辺値に収束することを数値的にも確認した。

導出の方法については、概要だけ以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

フーリエ級数（ Z(2)分割母等式 ）

$\cos x/1^2 + \cos 3x/3^2 + \cos 5x/5^2 + \cos 7x/7^2 + \cdots = \pi(\pi-2x)/8 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

上記フーリエ級数のｘに $0, \pi/4, \pi/3, \pi/6, \pi/12, 5\pi/12$ を代入すると、級数 A1～A5 と級数Ｅに関する六つの連立方程式が得られる。それを解いて A1～A5 の値が得られる。

なお、級数Ｅとは、$E=1/3^2-1/9^2-1/15^2+1/21^2+1/27^2-1/33^2-1/39^2+1/45^2+\cdots$

というものであるが、いまは興味なし。

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回の結果を再掲。

****

■Z(2)変５分割

$A1= 1 +1/23^2 +1/25^2 +1/47^2 +1/49^2 +1/71^2 + \cdots =(8+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A2=1/11^2 +1/13^2 +1/35^2 +1/37^2 +1/59^2 +1/61^2 +\cdots=(8-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A3=1/3^2 +1/9^2 +1/15^2 +1/21^2 +1/27^2 +1/33^2 +1/39^2 +1/45^2+\cdots=\pi^2/72$

$A4=1/5^2 +1/19^2 +1/29^2 +1/43^2 +1/53^2 +1/67^2 +\cdots=(8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A5=1/7^2 +1/17^2 +1/31^2 +1/41^2 +1/55^2 +1/65^2 +\cdots=(8+5\sqrt{2}-4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A1 +A2 +A3 +A4 +A5=Z(2)=\pi^2/8$ となる。

****

面白いのは、上記結果は次の５年前の３分割の C1 と C3 が分裂した結果である！ということである。

****

■Z(2)３分割　（５年前の結果）

$C1= 1 + 1/11^2 +1/13^2 +1/23^2 + 1/25^2 +1/35^2 +\cdots=(\pi/12)^2/\cos^2(5\pi/12)$

$C2=1/3^2 +1/9^2 +1/15^2 +1/21^2 + 1/27^2 +1/33^2 +\cdots=(\pi/12)^2/\cos^2(3\pi/12)$

$C3=1/5^2 +1/7^2 +1/17^2 +1/19^2 + 1/29^2+1/31^2 +\cdots=(\pi/12)^2/\cos^2(\pi/12)$

$C1 +C2 +C3=Z(2)$ である。

****

つまり、C1 が A1 と A2 に、C3 が A4 と A5 に分裂している。C2 は A3 と同じ。

$C1=A1 +A2$

$C2=A3$

$C3=A4 +A5$

一個の分身が二個に割れているわけで、極めて面白い。

なお、過去にも言及してきたが、Z(2)５分割でも Z(2)変５分割でも、また Z(2)３分割でも実質はそれぞれ４分割、変４分割、２分割であるといえる。なぜなら例えば、C2 などは（A3 も同じだが）

$C2=1/3^2 +1/9^2 +1/15^2 +1/21^2 + 1/27^2 +1/33^2 +\cdots$

$=(1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots)/3^2$
$=Z(2)/9$
であり、Z(2)本体そのものだからである。注意されたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 上方で見たすべての分身たちのそれぞれの値のπ²にかかる数は作図可能数となる（定規とコンパスで作成できる数）。それらは有理数と√のみで構成された数であり、3乗根、４乗根・・などは出てこない。cos()で表現しているものもあるが、結局そのようになる。
　そして、それら分身たちは、Z(2)（つまりζ(2)）という明示的な特殊値をもつ級数のパーツである。かなり以前、開発したテイラーシステムで、ゼータの明示的な特殊値は、自明な零点によって生み出されることを示した。よって、分身たちも自動的に自明な零点と関係する。

●前回のＬ(1)の変５分割と今回のＺ(2)の変５分割を並べてみよう。両者は完全な対応を成している。なんともすばらしい眺めである。

■Z(2)変５分割

$A1=1+1/23^2+1/25^2+1/47^2+1/49^2+1/71^2+\cdots=(8+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6})\pi^2/288$
$A2=1/11^2+1/13^2+1/35^2+1/37^2+1/59^2+1/61^2+\cdots=(8-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\pi^2/288$
$A3=1/3^2+1/9^2+1/15^2+1/21^2+1/27^2+1/33^2+1/39^2+1/45^2+\cdots=\pi^2/72$
$A4=1/5^2+1/19^2+1/29^2+1/43^2+1/53^2+1/67^2+\cdots=(8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6})\pi^2/288$
$A5=1/7^2+1/17^2+1/31^2+1/41^2+1/55^2+1/65^2+\cdots=(8+5\sqrt{2}-4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\pi^2/288$

$A1+A2+A3+A4+A5=Z(2)=\pi^2/8$ となる。

■L(1)変５分割

$D1=1-1/23+1/25-1/47+1/49-1/71+\cdots=(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$
$D2=1/11-1/13+1/35-1/37+1/59-1/61+\cdots=(-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$
$D3=1/3-1/9+1/15-1/21+1/27-1/33+\cdots=\pi/12$
$D4=1/5-1/19+1/29-1/43+1/53-1/67+\cdots=(2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$
$D5=1/7-1/17+1/31-1/41+1/55-1/65+\cdots=(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$D1-D2-D3+D4-D5=L(1)=\pi/4$ となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.3.21 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）