＜ L(1)の変５分割 ＞

原初にかえって、L(1)の変５分割が見つかったので、今回はそれを紹介したい。“変５分割”とは新種の５分割というほどの意味である。

ここでL(1)は、

$L(1)=1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +\cdots$

である。

見出した変５分割は以下のものである。５年前の（その２８）の結果と比較した形で示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(1)変５分割

$C1= 1 -1/23 +1/25 -1/47 +1/49 -1/71 + \cdots =(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C2=1/11 -1/13 +1/35 -1/37 +1/59 -1/61 +\cdots=(-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C3=1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 +\cdots=\pi/12$

$C4=1/5 -1/19 +1/29 -1/43 +1/53 -1/67 +\cdots =(2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C5=1/7 -1/17 +1/31 -1/41 +1/55 -1/65 +\cdots =(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C1 -C2 -C3 +C4 -C5=L(1)=\pi/4$ となる。

■L(1)５分割　（５年前の結果）

$A1= 1 -1/19 +1/21 -1/39 +1/41 -1/59 +\cdots =(\pi/20)\tan(9\pi/20)$

$A2=1/3 -1/17 +1/23 -1/37 +1/43 -1/57 +\cdots=(\pi/20)\tan(7\pi/20)$

$A3=1/5 -1/15 +1/25 -1/35 +1/45 -1/55 +\cdots=(\pi/20)\tan(5\pi/20)$

$A4=1/7 -1/13 +1/27 -1/33 +1/47 -1/53 +\cdots =(\pi/20)\tan(3\pi/20)$

$A5=1/9 -1/11 +1/29 -1/31 +1/49 -1/51 +\cdots =(\pi/20)\tan(\pi/20)$

$A1 -A2 +A3 -A4 +A5=L(1)=\pi/4$ となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。$C1 -C2 -C3 +C4 -C5=L(1)$から、$C1,-C2,-C3,C4,-C5$が５分身（変５分身）となる。

これらの分身たちはL(1)という母体の部品（パーツ）となっていると見ることもできる。

導出の方法は概要だけ以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

フーリエ級数（　L(1)分割母等式　）

$\sin x/1 +\sin 3x/3 + \sin 5x/5 +\sin 7x/7+\cdots=\pi/4 \quad (0<x<\pi)$

上記フーリエ級数のｘに$\pi/2, \pi/4, \pi/3, \pi/6, \pi/12, 5\pi/12$を代入すると、C1～C5とＤに関する六つの連立方程式が得られる。それを解いてC1～C5の値が得られた。

なお、Ｄとは、$D=1/3 +1/9 -1/15 -1/21 +1/27 +1/33 -1/39 -1/45 +\cdots=(\sqrt{2}/12)\pi$ である。（いまは興味なし）

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

さて、今回の結果を再掲。

****

■L(1)変５分割

$C1= 1 -1/23 +1/25 -1/47 +1/49 -1/71 + \cdots =(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C2=1/11 -1/13 +1/35 -1/37 +1/59 -1/61 +\cdots=(-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C3=1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 +\cdots=\pi/12$

$C4=1/5 -1/19 +1/29 -1/43 +1/53 -1/67 +\cdots =(2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C5=1/7 -1/17 +1/31 -1/41 +1/55 -1/65 +\cdots =(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C1 -C2 -C3 +C4 -C5=L(1)=\pi/4$ となる。

****

面白いのは、上記結果が５年前の次の３分割の B1 と B3 がそれぞれ分裂した結果である！ということである。

****

■L(1)３分割　（５年前の結果）

$B1= 1 -1/11 +1/13 -1/23 +1/25 -1/35 +\cdots =(\pi/12)\tan(5\pi/12)$

$B2=1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 +\cdots=(\pi/12)\tan(3\pi/12)$

$B3=1/5 -1/7 +1/17 -1/19 +1/29 -1/31 +\cdots=(\pi/12)\tan(\pi/12)$

$B1 -B2 +B3=L(1)$ である。

****

つまり、B1がC1と-C2に、B3がC4と-C5に分裂している。B2はC3と同じである。

$B1=C1 -C2$

$B3=C4 -C5$

一個の分身が二個に割れているわけだが、このような分裂（分割）の性質は極めて興味深い。

なお、過去にも何度か言及してきたが、L(1)５分割でもL(1)変５分割でも、またL(1)３分割でも実質は、それぞれ４分割、変４分割、２分割であるといえる。なぜなら例えば、B2などは$B2=1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 +\cdots=L(1)/3$であり、L(1)本体そのものだからである。注意されたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝

● この５年間、ひたすら標準的な分割（分裂）を行ってきたわけであるが、今回の結果などからそれとは違う分裂もまた存在すると分かった。それも無限に多くの種類があるはずである。

結果的にみると、今回の変５分割は、５年前の標準的な３分割から出た！ということができる。
そして、その C1,-C2,C4,-C5 の分身は、さらにそれぞれ二個の分身に分裂するはずである（C3 は不変）。そして、それらもまた・・という形で無限に分裂してく。そんな未発見の洞窟がいくつもあると思う。

● それら別系列の分裂（分割）による分身たちの値を解にもつ固有方程式、固有値行列、固有方程式の多項式関数を解にもつ微分方程式は、どんなものになるのだろうか。

標準の分割の固有方程式では、パスカルの三角形がでてきたが・・

● 大事なことは、分身の値（πにかかる値）は作図可能数（定規とコンパスで作図できる数）になっているということである。これは以前示したが、ゼータ特殊値において大事なことである。

■L(1)変５分割

$C1= 1 -1/23 +1/25 -1/47 +1/49 -1/71 + \cdots =(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C2=1/11 -1/13 +1/35 -1/37 +1/59 -1/61 + \cdots =(-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C3=1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 + \cdots =\pi/12$

$C4=1/5 -1/19 +1/29 -1/43 +1/53 -1/67 + \cdots =(2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

$C5=1/7 -1/17 +1/31 -1/41 +1/55 -1/65 + \cdots =(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\pi/24$

この右辺のようにπにかかるものは√と有理数を組み合わせた数しか出てこない。3 乗根、４乗根など出ない。ゼータとその分身は二次方程式の世界の住人である。

● 分身が二つに割れる分裂（それぞれの値が求まる）は興味深い現象である。

それに比べて、結合（足し算）の世界は味気ない。なぜなら、例えば、上記のＬ(1)変５分割などでも C1 と C5 を足せば、「それは別の分身だ！」と主張できるからである。そんなことは当たり前だし、組み合わせも多数あって、数学にとって本質的ではない。

最近、香り式の変〇分割を出していくつか投稿したが、それらはその種の味気ない分身となっていると気づいた（標準的な分割の足し算で簡単に構成できる）。よって、香り式のここ数回の投稿分はエッセンシャルなものではなかった。注意とともに報告とさせていただく。

＝＝

2023.3.5 杉岡幹生