# ＜ Z(2)香り式の変３分割 ＞

Z(2)香り式の変３分割が出たので、それを紹介したい。これは（その２７８）のL(1)香り式の変３分割に対応するもの（その類似）である。“変３分割“というのは、新種の３分割というほどの意味である。

ここでZ(2)は、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)$であり、リーマン・ゼータ$\zeta(s)$の$\zeta(2)$と本質的に同じである。Z()という記法は私が独自に使っているものである。またZ(2)香り式とは、下方の①のことである。

さて、見つけたZ(2)香り式の変３分割を示すと以下となる。

Z(2)香り式の本体（１分割）と、（その２４２）で導いた普通の（標準的な）３分割も一緒に並べた。なお、ch, sh, thは、それぞれ双曲線関数cosh, sinh, tanhのことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

## ＜ Z(2)香り式（本体, １分割） ＞

$$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2) \quad \text{---①}$$

aは任意の実数。

## ＜ Z(2)香り式の変３分割 ＞

$$A1=1/(1^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(20a))\{2\mathrm{sh}(a\pi/2)+(1+\sqrt{5})\mathrm{sh}(3a\pi/10)+(1-\sqrt{5})\mathrm{sh}(-a\pi/10)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{---②}$$

$$A2=1/(3^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(20a))\{2\mathrm{sh}(a\pi/2)+(1-\sqrt{5})\mathrm{sh}(3a\pi/10)+(1+\sqrt{5})\mathrm{sh}(-a\pi/10)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{---③}$$

$$A3=1/(5^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+1/(45^2+a^2)+1/(55^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(20a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-2\mathrm{sh}(3a\pi/10)-2\mathrm{sh}(-a\pi/10)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{-----④}$$

## ＜Z(2)香り式の(標準的な)３分割＞

$$B1=1/(1^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)+\sqrt{3}\mathrm{sh}(a\pi/3)+\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{--⑤}$$

$$B2=1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-2\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{-------⑥}$$

$$B3=1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-\sqrt{3}\mathrm{sh}(a\pi/3)+\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{---⑦}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

変３分割はこのようなものとなった。

A1 +A2 +A3＝①となるので、②～④の A1,A2,A3 が Z(2)香り式の３分身（変３分身）となっている。
　④～⑥は昨年見つけたものだが、これも B1 +B2 +B3＝①となり３分割（３分身）となっている。

　Z(2)香り式の２種類の３分割が見つかったわけで、興味深いことである。Excel で数値検証も行ったが正しいものであった。

　導出の方法は、概要だけ以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

**ゼータ香り式分割母等式Ⅱ**

$$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cos 7x/(7^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

a は任意の実数。（a が 0 の場合は、a->0 を意味する）

　上記の母等式の x に 0 とπ/5 と 3π/5 を代入すると、それぞれに対応する三式が得られる。それは②～④の左辺の級数 A1,A2,A3 に関する連立方程式となっている。それを解いて A1,A2,A3 の値が得られた。
以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　このようにして導いた。導いていると、対称性の泉から分身たちが湧き上がってくるような感じがする。

　今回の結果はＬ(1)香り式の場合の類似と冒頭に述べたが、ここで今回得た結果と（その２７８）のＬ(1)香り式の変３分割を一緒に並べよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

## ＜ Z(2)香り式の変３分割 ＞

$$A1=1/(1^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(20a))\{2\mathrm{sh}(a\pi/2)+(1+\sqrt{5})\mathrm{sh}(3a\pi/10)+(1-\sqrt{5})\mathrm{sh}(-a\pi/10)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A2=1/(3^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(20a))\{2\mathrm{sh}(a\pi/2)+(1-\sqrt{5})\mathrm{sh}(3a\pi/10)+(1+\sqrt{5})\mathrm{sh}(-a\pi/10)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A3=1/(5^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+1/(45^2+a^2)+1/(55^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(20a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-2\mathrm{sh}(3a\pi/10)-2\mathrm{sh}(-a\pi/10)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

## ＜ Ｌ(1)香り式の変３分割 ＞

$$C1=1/(1^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)-19/(19^2+a^2)+21/(21^2+a^2)+29/(29^2+a^2)-\cdots$$
$$=(\pi/10)/\mathrm{ch}(a\pi/10)+\pi\{\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/5)-\beta\cdot\mathrm{ch}(2a\pi/5)\}/(\sqrt{5}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/2))$$

$$C2=3/(3^2+a^2)+7/(7^2+a^2)-13/(13^2+a^2)-17/(17^2+a^2)+23/(23^2+a^2)+27/(27^2+a^2)-\cdots$$
$$=-(\pi/10)/\mathrm{ch}(a\pi/10)+\pi\{\alpha\cdot\mathrm{ch}(2a\pi/5)-\beta\cdot\mathrm{ch}(a\pi/5)\}/(\sqrt{5}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/2))$$

$C3=5/(5^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+25/(25^2+a^2)-35/(35^2+a^2)+45/(45^2+a^2)-55/(55^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/20)/\mathrm{ch}(a\pi/10)$

ここで、$\alpha=\sin(3\pi/10)=(\sqrt{5}+1)/4$, $\beta=\sin(\pi/10)=(\sqrt{5}-1)/4$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

左辺の級数を見ると、両者は<u>完全に対応</u>していることがわかる。

2023.2.25 杉岡幹生