＜ L(1)香り式の変２分割 ＞

L(1)香り式でも、前回（その２７９）のZ(2)香り式と同じ変２分割（変２分割の類似）が成り立つことが分かったので、今回はそれを示したい。(“変２分割”は、新種の２分割というほどの意味である)

前回も述べたが、こんな身近な所に新種の２分身が隠れていたことに驚く。本シリーズではゼータの分割を長くやっており、ゼータ香り式の分割はまだそんなにやっていない。ゼータの固定観念から香り式で普通の２分割を出しても、変２分割などに気づかなった。変２分割はゼータでは本質的な分割にならないが、香り式では本質的な分割になる。

まず、今回見つけたL(1)香り式の変２分割を示す。以下となる。
L(1)香り式の本体（１分割）と、(その２３７）で導出した普通の（標準的な）２分割も一緒に並べた。なお、ch, sh, th は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh, tanh のことである。sh と th は本稿の後半にある。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ L(1)香り式（本体、１分割） ＞

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----①

a は任意の実数。

＜ L(1)香り式の変２分割 ＞

$A1=1/(1^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +13/(13^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -19/(19^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/6)\{1+\mathrm{ch}(a\pi/3)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----②

$A2=3/(3^2+a^2)\ -9/(9^2+a^2)\ +15/(15^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +27/(27^2+a^2)\ -33/(33^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/6)\{-1/2+\mathrm{ch}(a\pi/3)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---③

＜ L(1)香り式の(標準的な)２分割＞

$B1=1/(1^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----④

$B2=3/(3^2+a^2)\ -5/(5^2+a^2)\ +11/(11^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ +19/(19^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑤

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

変２分割はこのようなものとなった。
A1 +(-A2)＝①となるので、A1,-A2 がL(1)香り式の２分身（変２分身）となっている。

④、⑤は１年前に見つけたものだが、B1 +(-B2)＝①となり、これも２分割となっている。

このようにL(1)香り式の２種類の２分割が見つかったわけで、大変面白いことである。

なお、Excel で数値検証も行ったが正しいものであった。

導出の方法については、概要だけ以下に簡潔に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ

$\sin x/(1^2+a^2)\ +3\sin 3x/(3^2+a^2)\ +5\sin 5x/(5^2+a^2)\ +7\sin 7x/(7^2+a^2)\ +\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

（$0<x<\pi$，a は任意の実数）

この母等式の x に $\pi/2$ と $\pi/6$ を代入すると、それぞれに対応する二式が得られる。それは②、③の左辺の級数 A1，A2 に関する連立方程式となる。それを解いて、級数 A1，A2 の値が得られた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように導出は簡単だが、対称性の泉から分身たちが湧き上がってくるようで味わいがある。

ここで、整理整頓の意味で、今回の結果と前回出した Z(2) 香り式の変２分割を一緒に並べよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ L(1)香り式（本体、１分割） ＞

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

a は任意の実数。

＜ L(1)香り式の変２分割 ＞

$A1=1/(1^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +13/(13^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -19/(19^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/6)\{1+\mathrm{ch}(a\pi/3)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$A2=3/(3^2+a^2)\ -9/(9^2+a^2)\ +15/(15^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +27/(27^2+a^2)\ -33/(33^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/6)\{-1/2+\mathrm{ch}(a\pi/3)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

＜ L(1)香り式の(標準的な)２分割＞

$B1=1/(1^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$B2=3/(3^2+a^2)\ -5/(5^2+a^2)\ +11/(11^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ +19/(19^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

＜ Z(2)香り式（本体、１分割） ＞

$1/(1^2+a^2)\ +1/(3^2+a^2)\ +1/(5^2+a^2)\ +1/(7^2+a^2)\ +1/(9^2+a^2)\ +1/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2)$

a は任意の実数(0 のとき a->0)。

＜ Z(2)香り式の変２分割 ＞

$C1=1/(1^2+a^2)\ +1/(5^2+a^2)\ +1/(7^2+a^2)\ +1/(11^2+a^2)\ +1/(13^2+a^2)\ +1/(17^2+a^2)\ +1/(19^2+a^2)\ +1/(23^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/(6a))\{th(a\pi/2)+sh(a\pi/6)/ch(a\pi/2)\}$

$C2=1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(6a))\{(1/2)th(a\pi/2)-sh(a\pi/6)/ch(a\pi/2)\}$

＜Z(2)香り式の(標準的な)２分割＞

$D1=1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{th(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot sh(a\pi/4)/ch(a\pi/2)\}$

$D2=1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{th(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot sh(a\pi/4)/ch(a\pi/2)\}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　　これらを眺めると、両者は完全に対応していることがわかるだろう。

　ゼータの分割と同様に、『L(1)香り式で成り立てば、それはZ(2)香り式でも成り立つ。逆もまたしかり』ということになる。

　なお、Z(2)とは、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)$であり、リーマン・ゼータ$\zeta(s)$の$\zeta(2)$と本質的に同じである。Z()という記法は私が独自に使っているものであり、注意されたい。

　最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● L(1)香り式とZ(2)香り式の本体を並べよう。

＜ L(1)香り式（本体、１分割）　＞

$1/(1^2+a^2)-3/(3^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)/ch(a\pi/2)$

aは任意の実数。

＜ Z(2)香り式（本体、１分割）　＞

$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))th(a\pi/2)$

aは任意の実数(0のとき a->0)。

　上式でa=0とすると$1-1/3+1/5-1/7+\cdots=\pi/4$になる。

　　下式でa->0とすると、$1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$になる。

これらは有名でありふしぎであるけれども香り式本体の極限にすぎず、私としては香り式の方が深みがあって好みである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.2.18 杉岡幹生