＜ Z(2)香り式の変２分割 ＞

今回は、Z(2)香り式（つまりζ(2)香り式）の変２分割を見出したので、それを紹介したい。“変２分割“というのは、前回定義した通り、新種の２分割という意味である。

ここでZ(2)は、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)$であり、リーマン・ゼータζ(s)のζ(2)と本質的に同じである。Z()という記法は私が独自に使っているものである。

さて、今回見つけたZ(2)香り式の変２分割を示すと以下となる。
Z(2)香り式の本体（１分割）と（その２３６）で導出した普通の（標準的な）２分割も一緒に並べた。なお、以下のch, sh, thは、それぞれ双曲線関数cosh, sinh, tanhのことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ Z(2)香り式 ＞

$$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2) \quad \text{---①}$$

aは任意の実数。

＜ Z(2)香り式の変２分割 ＞

$$A1=1/(1^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(6a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\mathrm{sh}(a\pi/6)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad \text{---②}$$

$$A2=1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(6a))\{(1/2)\mathrm{th}(a\pi/2)-\mathrm{sh}(a\pi/6)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad \text{--③}$$

＜Z(2)香り式の(標準的な)２分割＞

$$B1=1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad \text{---④}$$

$$B2=1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad \text{---⑤}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

変２分割はこのようなものとなった。
A1 +A2＝①となるので、②、③のA1,A2がZ(2)香り式の２分身（変２分身）となっている。

④、⑤は昨年見つけたものだが、これもB1 +B2＝①となり２分割（２分身）となっている。

このようにZ(2)香り式の２種類の２分割が見つかった。非常に面白いことである。

なお、Excelで数値検証も行ったが正しいものであった。収束は遅く数千万項を計算した。

導出の方法については、概要だけ以下に簡潔に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq \pi)$

a は任意の実数。(a が 0 の場合は、a->0 を意味する)

上記の母等式の x に 0 とπ/3 を代入すると、二式が得られる。それは②、③の A1, A2 に関する連立方程式となっている。その連立方程式を解いて、A1, A2 が得られた。

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして導いた。A1 +A2＝①となっていることをもう一度確認いただきたい。深い味わいがある。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 過去に、この Z(2)香り式の変２分割に対応する Z(2)の２分割は出していないはずである。
なぜなら、上記 A2 に対応する Z(2)の分身は (a＝0 で)“$1/3^2+1/9^2+1/15^2+1/21^2+\cdots$”となり、これは本質的に Z(2)に等しくなり (Z(2)の有理数倍)、また簡単な計算で A1 に対応するもう一方の分身も同じことになって、両者はともに偽の分身となるからである。

つまり、両方の分身とも、分身＝(有理数)×Z(2)となり、これは本質的には１分身(Z(2))そのものであり、２分割とする意味がない。

ところが一方、Z(2)香り式の場合は、１分身(①)と同じ a (任意の実数)を採用する限り、上記のようなことにはならない。よって A1 と A2 は、本質的な２分割(２分身)となっている。まったく面白い。

● ただし上記に関しすこし補足すると、A2 を単独で見て、a を変数変換した場合(a＝3b, b は任意の実数)、A2 は①そのものに変換できる。これは眺めればすぐに気づくことだが、念のための補足とした。

● こんな身近なところに新種の２分身(変２分身)が隠れていたとは、ちょっと驚きである。このシリーズではゼータの分割を非常に長くやっており、ゼータ香り式の分割はまだそんなにやっていない。

よって、ゼータの場合の固定観念があって、香り式において(その２３６)で普通の２分割を出しても、変２分割にすぐに気づかなった。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.2.13 杉岡幹生