＜ L(1)香り式の変３分割 ＞

過去のゼータの分割を見直していて、（その２３３）で新種の２分割を一つ、新種の３分割を二つ見出していたことを思い出した。
その新種の２分割はL(1)の３分割なのだけれども、一つの分身がL(1)の有理数倍となり本質的にL(1)に等しいので、新種の２分割としたのであった（下方参照）。
新種の３分割も同様でそれらは４分割なのだけれども、上記と同じようなことになり、よって新種の３分割としたものである。

さて、それを眺めていて、その方法がゼータの香りの漂う公式（ゼータ香り式）に応用できることに気づいた。分割に関しては、ゼータのみならずフーリエ級数から出る級数全般に対しても分割ができることに気づきはじめた。ここ１年ほどのことである。

よって、ここ１年ほどは、ゼータや香り式についてもフーリエ級数を母等式に据えて分割を行ってきた。そのフーリエ級数（母等式）は既に見出しているので、上記のことを応用した結果、今回、L(1)香り式の新種の３分割を導出することに成功した。それはL(1)の新種の２分割（形式的には３分割）に対応するものである。

新種の分割（分身）はいろいろな種類が飛び出しそうな雰囲気があり、簡潔な呼び方をしたく、今後は、これらの分割をまとめて、“変○分割”と呼ぶことにする。よって今回見つけた新種の３分割は、変３分割と呼ぶことにする。これまで行ってきた分割を普通の分割（標準の分割）とすれば、それとは別の分割というほどの意味である。

さて、今回見つけたL(1)香り式の新種の３分割、すなわち変３分割を示すことにする。以下のものである。（その２４４）の普通の（標準的な）３分割も一緒に並べた。なお、以下の ch は、双曲線関数 cosh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ L(1)香り式 ＞

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{----①}$$

a は任意の実数。

＜ L(1)香り式の変３分割 ＞

$$A1=1/(1^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ -19/(19^2+a^2)\ +21/(21^2+a^2)\ +29/(29^2+a^2)\ -\cdots$$
$$=(\pi/10)/\mathrm{ch}(a\pi/10)\ +\pi\{\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/5)\ -\beta\cdot\mathrm{ch}(2a\pi/5)\}/(\sqrt{5}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/2)) \quad \text{---②}$$

$$A2=3/(3^2+a^2)\ +7/(7^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ -17/(17^2+a^2)\ +23/(23^2+a^2)\ +27/(27^2+a^2)\ -\cdots$$
$$=-(\pi/10)/\mathrm{ch}(a\pi/10)\ +\pi\{\alpha\cdot\mathrm{ch}(2a\pi/5)\ -\beta\cdot\mathrm{ch}(a\pi/5)\}/(\sqrt{5}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/2)) \quad \text{---③}$$

$$A3=5/(5^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +25/(25^2+a^2)\ -35/(35^2+a^2)\ +45/(45^2+a^2)\ -55/(55^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/20)/\mathrm{ch}(a\pi/10) \quad \text{---④}$$

ここで、$\alpha=\sin(3\pi/10)=(\sqrt{5}+1)/4$, $\beta=\sin(\pi/10)=(\sqrt{5}-1)/4$

＜ L(1)香り式の（標準的な）３分割 ＞

$$B1=1/(1^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+13/(13^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+25/(25^2+a^2)-35/(35^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/6)\{ch^2(a\pi/6)+(\sqrt{3}/2)\cdot ch(a\pi/6)\}/ch(a\pi/2) \quad \text{---⑤}$$

$$B2=3/(3^2+a^2)-9/(9^2+a^2)+15/(15^2+a^2)-21/(21^2+a^2)+27/(27^2+a^2)-33/(33^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/12)\{2\cdot ch(a\pi/3)-1\}/ch(a\pi/2) \quad \text{-----⑥}$$

$$B3=5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-19/(19^2+a^2)+29/(29^2+a^2)-31/(31^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/6)\{ch^2(a\pi/6)-(\sqrt{3}/2)\cdot ch(a\pi/6)\}/ch(a\pi/2) \quad \text{---⑦}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

変３分割はこのようなものとなった。
A1 -A2 +A3＝①となるので、A1,-A2,A3 がL(1)香り式の３分身となっている。

また⑤、⑥、⑦は昨年見つけたものだが、これも B1 -B2 +B3＝①となりL(1)香り式の３分割となっている。

このようにしてL(1)香り式の２種類の３分割が見つかった。非常に面白いことである。

なお、Excel で数値検証も行ったが正しいものであった。収束は遅く 8000 万項ほど計算した。

導出の方法は概要だけ以下に簡潔に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$$\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)ch(a(\pi/2-x))/ch(a\pi/2)$$

（$0<x<\pi$, a は任意の実数）

上記の母等式Ｉの x に $9\pi/10$、$7\pi/10$、$5\pi/10$（つまり $\pi/2$）を代入すると、三式が得られる。それは上方の A1, A2, A3 に関する連立方程式となっている。（x に $5\pi/10$ を代入した式からは、A3 そのものが求まる）
その連立方程式を解いて、A1, -A2, A3 の変３分割（変３分身）が得られた。
以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして導いた。A1 -A2 +A3＝①となっていることをもう一度確認いただきたい。それは得も言われぬ味わいがある。

さて、ここで（その２３３）からL(1)の新種の２分割とL(1)香り式の上記の変３分割を並べてみよう。L(1)の方は比較しやすいように、すこし変形して形式的に３分割として示す。

****

■L(1)新種の２分割（形式的に３分割）

$C1= 1 +1/9 -1/11 -1/19 +1/21 +1/29 + \cdots =(\pi/10)/\cos(2\pi/5)$

$C2=1/3 +1/7 -1/13 -1/17 +1/23 +1/27 + \cdots=(\pi/10)/\cos(\pi/5)$

$C3=1/5 -1/15 +1/25 -1/35 +1/45 -1/55 + \cdots=(\pi/20)$

C1 -C2 +C3=L(1)となっている。

＜L(1)香り式の変３分割＞

$A1=1/(1^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -11/(11^2+a^2) -19/(19^2+a^2) +21/(21^2+a^2) +29/(29^2+a^2) - \cdots$

$=(\pi/10)/ch(a\pi/10) +\pi\{\alpha\cdot ch(a\pi/5) -\beta\cdot ch(2a\pi/5)\}/(\sqrt{5}\cdot ch(a\pi/2))$ ---②

$A2=3/(3^2+a^2) +7/(7^2+a^2) -13/(13^2+a^2) -17/(17^2+a^2) +23/(23^2+a^2) +27/(27^2+a^2) - \cdots$

$=-(\pi/10)/ch(a\pi/10) +\pi\{\alpha\cdot ch(2a\pi/5) -\beta\cdot ch(a\pi/5)\}/(\sqrt{5}\cdot ch(a\pi/2))$ ---③

$A3=5/(5^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +25/(25^2+a^2) -35/(35^2+a^2) +45/(45^2+a^2) -55/(55^2+a^2) + \cdots$

$=(\pi/20)/ch(a\pi/10)$ ---④

ここで、$\alpha=\sin(3\pi/10)=(\sqrt{5} +1)/4,\ \beta=\sin(\pi/10) =(\sqrt{5} -1)/4$

A1 -A2 +A3=①(1 分身)となっている。

****

このように並べると、両者は完全に対応していることがわかる。
L(1)では C3 は L(1)/5 であり、よって新種の２分割（３分割ではなく）としたのである。C1 -C2=(4/5)L(1)である！

一方、L(1)香り式の方はその種の変形ができそうでできない。A3 は①の１分身の有理数倍とはならない。
つまり A3 は本当の分身であり、よって A1,-A2,A3 は、本質的に L(1)香り式の３分割（３分身）となっている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 過去のノートを見直すと、L(1)新種の２分割（形式的に３分割）は、L(1)の５分割から逆算的に求めていることがわかる。

下記から D1+D5=C1 であり、D2+D4=C2 である。興味深い構造である。

■L(1)５分割

D1＝ 1 -1/19 +1/21 -1/39 +1/41 -1/59 +・・ ＝(π/20)tan(9π/20)

D2＝1/3 -1/17 +1/23 -1/37 +1/43 -1/57 +・・＝(π/20)tan(7π/20)

D3＝1/5 -1/15 +1/25 -1/35 +1/45 -1/55 +・・＝(π/20)tan(5π/20)

D4＝1/7 -1/13 +1/27 -1/33 +1/47 -1/53 +・・ ＝(π/20)tan(3π/20)

D5＝1/9 -1/11 +1/29 -1/31 +1/49 -1/51 +・・ ＝(π/20)tan(π/20)

D1 −D2 +D3 −D4 +D5＝L(1) である。

●変３分割は他にもあるだろうか。さきほどL(1)９分割を眺めていたのだが、たぶんそれは存在する。

●ゼータや香り式の分割は、どこまで広がっているのだろうか。それはかなり広い。いや結局フーリエ級数から出てくる級数全般にいえることなのでゼータどころの話ではない。

●分割は、１個の分身が２個に分かれ、そのそれぞれがまた２個に分かれ・・と倍々ゲームで増えていく。無限の彼方（無限個の分身！）の逆方向から見ると、二つが１個に合体し・・また合体し・・と二つずつが合体を繰り返して、最終の１分身になる。それはフラクタルのような構造である。
　しかもそれは一つだけのパターンではない。いくつもいくつも多様なパターンがある。それは万華鏡のようである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.2.5 杉岡幹生