＜ 双曲線ゼータとその派生式 その８＞

前回八つの興味ある等式を示したが、それからさらに二つ出たのでそれを加えた形で全部を示すことにする。以下のものだが、今回追加した分は最後の二つ（⑨と⑩）である。
なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。よって例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。
またａは任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh^2a}}-\frac{3}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{5}{\mathrm{sh^25a}}-\frac{7}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{2sh2a}}{\mathrm{ch^22a}}+\frac{\mathrm{4sh4a}}{\mathrm{ch^24a}}+\frac{\mathrm{6sh6a}}{\mathrm{ch^26a}}+\frac{\mathrm{8sh8a}}{\mathrm{ch^28a}}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{1}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{1}{\mathrm{sh^25a}}+\frac{1}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh^22a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh^24a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh^3a}}+\frac{\mathrm{2ch2a}}{\mathrm{sh^32a}}+\frac{\mathrm{3ch3a}}{\mathrm{sh^33a}}+\frac{\mathrm{4ch4a}}{\mathrm{sh^34a}}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh^2a}}-\frac{2^2}{\mathrm{sh^22a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh^23a}}-\frac{4^2}{\mathrm{sh^24a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch^3a}}+\frac{\mathrm{2sh2a}}{\mathrm{ch^32a}}+\frac{\mathrm{3sh3a}}{\mathrm{ch^33a}}+\frac{\mathrm{4sh4a}}{\mathrm{ch^34a}}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh^2a}}-\frac{2}{\mathrm{sh^22a}}+\frac{3}{\mathrm{sh^23a}}-\frac{4}{\mathrm{sh^24a}}+\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch^2a}}+\frac{2}{\mathrm{ch^22a}}+\frac{3}{\mathrm{ch^23a}}+\frac{4}{\mathrm{ch^24a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh^2a}}-\frac{3^2}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{5^2}{\mathrm{sh^25a}}-\frac{7^2}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh^22a-1}}{\mathrm{ch^32a}}+\frac{\mathrm{2(sh^24a-1)}}{\mathrm{ch^34a}}+\frac{\mathrm{3(sh^26a-1)}}{\mathrm{ch^36a}}+\frac{\mathrm{4(sh^28a-1)}}{\mathrm{ch^38a}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑥}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sha}\left\{\frac{\mathrm{2sh2a}}{\mathrm{(ch2a-cha)^2}}+\frac{\mathrm{4sh4a}}{\mathrm{(ch4a-cha)^2}}+\frac{\mathrm{6sh6a}}{\mathrm{(ch6a-cha)^2}}+\frac{\mathrm{8sh8a}}{\mathrm{(ch8a-cha)^2}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑦}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{ch}6\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{ch}8\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$$(a \neq 0)$$

$$2\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}+\frac{5\mathrm{ch}5\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 5\mathrm{a}}+\frac{7\mathrm{ch}7\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)=\frac{2^2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4^2\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6^2\mathrm{ch}6\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8^2\mathrm{ch}8\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑨}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}-\frac{2^2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3^2\mathrm{ch}3\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}-\frac{4^2\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}^3\mathrm{a}}+\frac{2^2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3^2\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4^2\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑩}$$

$$(a \neq 0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回加えたのは⑨と⑩だが、これらは簡単に出る。
②を a について微分すれば、⑨が得られ、⑤を a について微分すれば⑩が得られる。
⑩は左辺と右辺が対称的になっていて美しい。その美しさは元の⑤の綺麗な形からきているのだろう。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ①～⑦は、１１年前に研究した「ある母関数に対し“あるフーリエ級数”を適用する手法」を一般化し、そこから得られたフーリエ級数(x が変数、a が定数)を a で微分(or 積分)して出たフーリエ級数から得られたものである。つまり、ある母関数に“あるフーリエ級数”を適用すると別のフーリエ級数が得られた。それを a で微分(or 積分)したら最終のフーリエ級数が得られた！という意味である。
その導出方法は（その２１３）で粗く（流れだけ）示した。
さて、その最終的に得られたフーリエ級数（sin 版と cos 版がある）は、x が変数、a が定数という体裁を一応はとっているが、a での微分、積分も自由にでき、結局、2 変数という感じの式になっている。

● 上記で得たフーリエ級数は五つあって、それらの x にいろいろな値を代入して①～⑦を得た。
なお、⑧は⑤から簡単に出る。

● これらの式は得られたが、大事なものは地下に隠れている気がする。式の背後には得体のしれない構造があるのだろうけれども、そんなものがつかめるはずはなく、結局、表面にぽつぽつと顔を出す鉱石を拾っているだけという感じである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.1.28　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)