＜ 双曲線ゼータとその派生式 その７＞

前回と前々回である等式を導いた。それらはふしぎが詰まった式というべき興味深いものであった。さらに探索を続けると、それら以外にもいろいろと見つかった。

時系列で見つけた順に、全部をまとめて以下にまず示すことにする。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。よって例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。

また a 任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$(a>0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}^2 2a-1}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{2(\mathrm{sh}^2 4a-1)}{\mathrm{ch}^3 4a}+\frac{3(\mathrm{sh}^2 6a-1)}{\mathrm{ch}^3 6a}+\frac{4(\mathrm{sh}^2 8a-1)}{\mathrm{ch}^3 8a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑥}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{sha}\left\{\frac{2\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{cha})^2}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{cha})^2}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{cha})^2}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{cha})^2}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----⑦}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{ch}6\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{ch}8\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$$(a \neq 0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これまでこの８式を得た。他にもあるが、美しさでいま一つのものは省いた。

これらはすばらしい式に感じられる。ゼータのふしぎが漂っていて、この式の裏側に大きな何かが隠れているような気がしてくる。

じつは⑤と⑧は同値である。
⑤を変形すると⑧に到達するし、また逆も成り立つ。よって同値となる。
ここで、⑧と①を比較したい。両者を並べてみよう。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{ch}6\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{ch}8\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----⑧}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

$$(a > 0)$$

際立った対称性が出ている。ふしぎな感じである。

ついでに③と④を並べてみよう。

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}^3\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{ch}2\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ch}4\mathrm{a}}{\mathrm{sh}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----③}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}^3\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^3 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----④}$$

$$(a > 0)$$

こちらも同じような対称性が出ている。きれいなものである。このような秩序はいったいどこから来ているのだろうか・・

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●これらの式は、１１年前にやった「ある母関数に対し“あるフーリエ級数”を適用する手法」を一般化し、そこから得られたフーリエ級数（x が変数、a が定数）を a で微分（or 積分）して出たフーリエ級数から得られたも

のである。ややこしいがつまり、ある母関数に“あるフーリエ級数”を適用すると別のフーリエ級数が得られた。それを a で微分(or 積分)したら最終のフーリエ級数が得られた！という意味である。

その導出方法は（その２１３）で粗く（流れだけ）示した。

さて、その最終的に得られたフーリエ級数（sin 版と cos 版がある）は、x が変数、a が定数という体裁を一応はとっているが、a での微分、積分なども自由にできるわけであり、結局、2 変数という感じの式になっている。だから余計に豊かな結果を生むのだと思う。

● １１年前にラマヌジャン式を利用して以下を出していた。

ファン・ネス彗星　その２ (biglobe.ne.jp)

$1/\mathrm{sh}^2\pi + 1/\mathrm{sh}^2 2\pi + 1/\mathrm{sh}^2 3\pi + 1/\mathrm{sh}^2 4\pi + \cdots = 1/6 - 1/(2\pi)$

これがあるので②左辺を奇数でなく自然数に拡張した式を得たいと思うのだが。。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 \mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{sh}4\mathrm{a}}+\frac{6}{\mathrm{sh}6\mathrm{a}}+\frac{8}{\mathrm{sh}8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \qquad \text{----②}$$

● ８式のうち私の好みをあげると、次の２式となる。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 \mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{sh}4\mathrm{a}}+\frac{6}{\mathrm{sh}6\mathrm{a}}+\frac{8}{\mathrm{sh}8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \qquad \text{----②}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 \mathrm{a}}-\frac{2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 \mathrm{a}}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot \qquad \text{----⑤}$$

$$(a\neq 0)$$

これは絶品という気がする。甲乙つけがたい。眺めるだけで、さまざまな感情がわきおこってくる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.1.21　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)