＜ 双曲線ゼータとその派生式 その６＞

---- 美しい式 -----

ある美しい式が出たので、今回はそれを示したい。次のものである。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。よって例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{sh}4\mathrm{a}}+\frac{6}{\mathrm{sh}6\mathrm{a}}+\frac{8}{\mathrm{sh}8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----[1]}$$

$$(a>0)$$

これであるが、凄い式である。得たときは感動した。これは美しいというより神秘的な式である。

ゼータを感じさせるし、イマジネーションが絶えず喚起され、式の裏側に巨大なものがあることが連想される。いくら眺めていても飽きない。

Excel での数値検証も行い、正しいことを確認した。両辺とも収束が速いので確認は容易である。

前回得た式（下記の[2]）と一緒に並べよう。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2\mathrm{a}}+\frac{4}{\mathrm{sh}4\mathrm{a}}+\frac{6}{\mathrm{sh}6\mathrm{a}}+\frac{8}{\mathrm{sh}8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----[1]}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot \quad \text{----[2]}$$

$$(a>0)$$

[2]も素晴らしいものだが、両式を比較すると、やはりシンプルさにおいて[1]の方が上である。

[1]の導出方法の概要を示しておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜[1]の導出方法＞

$$\frac{\mathrm{sinx}}{e^a-1}+\frac{\mathrm{sin2x}}{e^{2a}-1}+\frac{\mathrm{sin3x}}{e^{3a}-1}+\frac{\mathrm{sin4x}}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sinx}}{2}\right)\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}a-\mathrm{cosx}}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{cosx}}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a-\mathrm{cosx}}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{cosx}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----①}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

$$\frac{\mathrm{cosx}}{e^a-1}+\frac{\mathrm{2cos2x}}{e^{2a}-1}+\frac{\mathrm{3cos3x}}{e^{3a}-1}+\frac{\mathrm{4cos4x}}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\mathrm{ch}a\cdot\mathrm{cosx}-1}{(\mathrm{ch}a-\mathrm{cosx})^2}+\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\mathrm{cosx}-1}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{cosx})^2}+\frac{\mathrm{ch}3a\cdot\mathrm{cosx}-1}{(\mathrm{ch}3a-\mathrm{cosx})^2}+\frac{\mathrm{ch}4a\cdot\mathrm{cosx}-1}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{cosx})^2}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----②}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

$$\frac{1-\cos x}{e^{a}-1}+\frac{(1/2)(1-\cos 2x)}{e^{2a}-1}+\frac{(1/3)(1-\cos 3x)}{e^{3a}-1}+\frac{(1/4)(1-\cos 4x)}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\log\left|\frac{\mathrm{ch}a-\cos x}{\mathrm{ch}a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}2a-\cos x}{\mathrm{ch}2a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}3a-\cos x}{\mathrm{ch}3a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}4a-\cos x}{\mathrm{ch}4a-1}\right|+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----③}$$

$$(-\pi\leq x\leq\pi,\quad a>0)$$

１年前（その２１２）でカンで予想し、（その２１３）で厳密に導いた三式を提示したが、上記の①～③がそれに当たる。

さて、③を a について微分して整理すると、次式を得る。

$$\frac{1-\cos x}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1-\cos 2x}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1-\cos 3x}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1-\cos 4x}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2(1-\cos x)\left\{\frac{1}{(\mathrm{ch}2a-\cos x)\mathrm{th}a}+\frac{2}{(\mathrm{ch}4a-\cos x)\mathrm{th}2a}+\frac{3}{(\mathrm{ch}6a-\cos x)\mathrm{th}3a}+\frac{4}{(\mathrm{ch}8a-\cos x)\mathrm{th}4a}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---④}$$

この④の x にπを代入して変形していくと、[1]に到達する。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして導出した。①～③からはラマヌジャン式と双曲線ゼータとが両方混じった式が出てくるのみである。それも興味深いことには変わりなく、１年前に（その２１２）でそのような興味ある式を出したが感激というほどでもなかった。

しかし、今回その隣にある別の世界に移行したら、奇跡的な式が飛び出したという流れになる。

三式（①～③）の世界より、それらを a で微分した式（領域）の方がより深い世界のような気がする。

[1], [2] を再掲。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot \quad \text{----[1]}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}^2 5a}-\frac{7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot \quad \text{----[2]}$$

$$(a>0)$$

③を a で微分した式から[1]が出た。①を a で微分した式から[2]が出た。

では、②を a で微分した式からは何が出るだろうか？

それは、下記のつぶやきで示す。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ②を a で微分した式からは、次の二式が出た。

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{2\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{3\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{4\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----[3]}$$

$$\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3 a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^3 2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^3 3a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^3 4a}+\cdot\cdot \quad \text{----[4]}$$

$(a>0)$

これも素晴らしい。
ペアで眺めると、ふしぎな対称性が出ており、隠れている地下構造の秩序を連想させる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.1.14　杉岡幹生

〈参考文献〉

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)