＜ 双曲線ゼータとその派生式 その５＞

---- 双曲線ゼータ類似のフーリエ級数の導出 -----

以前見た双曲線ゼータ関連で面白いフーリエ級数（下方の④）が得られたので、今回はそれを示したい。

１年前（その２１２）でカンで予想し、（その２１３）で厳密に導いた三式を提示したが、まずそれらを再度示すと下記①～③となる。①右辺は若干同値変形した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。よって例えば、ch2a は cosh(2a) のことである。

==================================

$$\frac{\sin x}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{\sin x}{2}\right)\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\cos x}+\cdot\cdot\right\}\quad \text{----①}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

$$\frac{\cos x}{e^{a}-1}+\frac{2\cos 2x}{e^{2a}-1}+\frac{3\cos 3x}{e^{3a}-1}+\frac{4\cos 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\mathrm{ch}a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}a-\cos x)^2}+\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}2a-\cos x)^2}+\frac{\mathrm{ch}3a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}3a-\cos x)^2}+\frac{\mathrm{ch}4a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}4a-\cos x)^2}+\cdot\cdot\right\}\quad \text{----②}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

$$\frac{1-\cos x}{e^{a}-1}+\frac{(1/2)(1-\cos 2x)}{e^{2a}-1}+\frac{(1/3)(1-\cos 3x)}{e^{3a}-1}+\frac{(1/4)(1-\cos 4x)}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\log\left|\frac{\mathrm{ch}a-\cos x}{\mathrm{ch}a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}2a-\cos x}{\mathrm{ch}2a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}3a-\cos x}{\mathrm{ch}3a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}4a-\cos x}{\mathrm{ch}4a-1}\right|+\cdot\cdot\right\}\quad \text{----③}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

==================================

１年前にこれらを示したわけであるが、②は①を x について微分して得た式であり、③は①を 0～x の範囲で積分して得た式である。

このように②と③は、①に対し x について微分したり積分したりして得たものであった。これらを眺めていて、ふと a について微分したら（積分したら）どうなるか？と思った。

じつは（その２１２）でそうつぶやいていながら、やるのを忘れていた。今回、①を a について微分したら次のフーリエ級数が得られた。

==================================

[①を a で微分して得られたフーリエ級数（④）]

$$\frac{\sin x}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2\sin 2x}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3\sin 3x}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4\sin 4x}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=\sin x\left\{\frac{2\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\cos x)^2}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\cos x)^2}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\cos x)^2}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\cos x)^2}+\cdot\cdot\right\}\quad \text{----④}$$

$$\left(-\pi \le x \le \pi, \quad a > 0\right)$$

上式の x にπ/2 を代入すると次を得る。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 \mathrm{a}} - \frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}} + \frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}} - \frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}} + \cdot\cdot = \frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}} + \frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}} + \frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 6\mathrm{a}} + \frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 8\mathrm{a}} + \cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

④は左辺がフーリエ級数の形になっている。つまり右辺の関数をフーリエ展開したものとみなすことができる。左辺が双曲線ゼータ類似の形になっていて、興味深い形をしたフーリエ級数となっている。

これまで双曲線ゼータ関連では、例えば①のようなラマヌジャン式に似たフーリエ級数しか得ていなかったのだが、今回は双曲線ゼータに似た形のフーリエ級数が得られたわけで、面白いものが出たといえると思う。

なお、④に対し x と a を様々に変えて Excel マクロで数値検証を行ったが、正しいものであった。

ところで、フーリエ級数が大事であるのは、そこから出る級数の分割ができ、分身たちを得ることができるからである。他にも利点があるだろうが、私が興味あるのはその点である。（その２１１）で、実際に少し分割を行った。

⑤を再掲。これはいくら眺めても飽きない式である。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 \mathrm{a}} - \frac{3}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}} + \frac{5}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}} - \frac{7}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}} + \cdot\cdot = \frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}} + \frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}} + \frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 6\mathrm{a}} + \frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}}{\mathrm{ch}^2 8\mathrm{a}} + \cdot\cdot \quad \text{----⑤}$$

左辺は、分子に着目すると L(-1)の類似物であるようにも見えるし、あるいは分母を見ると、下方で仮定した双曲線ゼータ sinhL(s,a)（下方⑦参照）の s＝2 の類似物のようにも見える。右辺は分子からζ(-1)の類似物を連想させる。
しかし、そんなことより、とにかくきれいである！

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●１年前に次のようにつぶやいたのだが、下記の式は③と結びつけることができるような気がしてきた。
本当に結びつくだろうか。

****

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1} + \frac{1/2}{e^{4\pi}-1} + \frac{1/3}{e^{6\pi}-1} + \frac{1/4}{e^{8\pi}-1} + \cdot\cdot\cdot = -\frac{\pi}{12} - \left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\omega}{\pi\sqrt{2}}\right)$$

ラマヌジャンは、上の結果を導いている。ωはレムニスケート周率。ω=2.622057・・
これと③とを結びつけるのは、むずかしいか。

上式にはωが見えている。これが出ていること自体、深いものを連想させる。

****

● 次式を１年前に示した。

$1/sh^2\pi + 1/sh^2 2\pi + 1/sh^2 3\pi + 1/sh^2 4\pi + \cdots = 1/6 - 1/(2\pi)$ ----⑥

これは双曲線ゼータ $sinhZ(s) = 1/sh^s\pi + 1/sh^s 2\pi + 1/sh^s 3\pi + 1/sh^s 4\pi + \cdots$ の特殊値を示したものともいえるが、実際に導いたのは１１年前であり、ラマヌジャン式を利用して出した。

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page218.htm

上式⑥を眺めていると、もっと a を含んだような一般式が存在するような気がしてくる。現時点ではそんな気がするだけだが・・

$1/sh^2 a + 1/sh^2 2a + 1/sh^2 3a + 1/sh^2 4a + \cdots =$「a を含んだ値」

という感じの式があるのではないか。

● 上記に関連し、双曲線ゼータ自体ももっと一般的に表現できるのでなかろうか。

$sinhZ(s) = 1/sh^s\pi + 1/sh^s 2\pi + 1/sh^s 3\pi + 1/sh^s 4\pi + \cdots$

１１年前に定義したこんな特殊な形より、次のような感じで表現できるのではないか。

$sinhZ(s,a) = 1/sh^s a + 1/sh^s 2a + 1/sh^s 3a + 1/sh^s 4a + \cdots$

あるいは⑤左辺から、こんな形もあるのではないか。

$sinhL(s,a) = 1/sh^s a - 1/sh^s 3a + 1/sh^s 5a - 1/sh^s 7a + \cdots$ ----⑦

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.1.8　杉岡幹生