＜ Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数由来の級数の分割（３分割）＞

前回からの続きで、Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数から

$1/e^{a} -1/e^{3a} +1/e^{5a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{11a} +1/e^{13a} -1/e^{15a} +\cdot\cdot = 1/(2cha)$

の級数の３分割を導出したので、今回はそれを報告したい。

なお、e は自然対数の底である。sh, ch はそれぞれ双曲線関数 sinh, cosh を略記したものである。よって例えば、cha や ch2a や sh5a はそれぞれそ cosh(a), cosh(2a), sinh(5a)の意味である。

まず結果から示す。前回の１分割、２分割も一緒に、今回の３分割を示すと以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数由来の級数②の分割

$sinx/e^{a} +sin2x/e^{2a} +sin3x/e^{3a} +sin4x/e^{4a} +\cdot\cdot = sinx/\{2(cha-cosx)\}$ ---①

$(-\pi \leqq x \leqq \pi,\ a>0)$

①の x にπ/2 を代入し、１分身(②)を得る。①の x にπ/2, π/4 を代入し、２分身(A1, −A2)を得る。①の x にπ/2, π/3, π/6 を代入し、３分身(B1, -B2, B3)を得る。

＜１分割＞

$1/e^{a} -1/e^{3a} +1/e^{5a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{11a} +1/e^{13a} -1/e^{15a} +\cdot\cdot = 1/(2cha)$ ----②

＜２分割＞

$A1 = 1/e^{a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{15a} +1/e^{17a} -1/e^{23a} +\cdot\cdot = 1/(4cha) +cha/(2ch2a)$

$A2 = 1/e^{3a} -1/e^{5a} +1/e^{11a} -1/e^{13a} +1/e^{19a} -1/e^{21a} +\cdot\cdot = -1/(4cha) +cha/(2ch2a)$

A1, −A2 が２分身である。すなわち、A1 +(−A2)＝１分身(②)となる。

＜３分割＞

$B1 = 1/e^{a} -1/e^{11a} +1/e^{13a} -1/e^{23a} +1/e^{25a} -1/e^{35a} +\cdot\cdot = sh5a/sh6a$

$B2 = 1/e^{3a} -1/e^{9a} +1/e^{15a} -1/e^{21a} +1/e^{27a} -1/e^{33a} +\cdot\cdot = 1/(2ch3a)$

$B3 = 1/e^{5a} -1/e^{7a} +1/e^{17a} -1/e^{19a} +1/e^{29a} -1/e^{31a} +\cdot\cdot = sha/sh6a$

B1, −B2, B3 が３分身である。すなわち、B1 +(−B2) +B3＝１分身(②)となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

３分割はこのようになった。あまりにシンプルで美しく、なにかあると感じてしまう。

最終結果はこのようにきれいになったが、途中計算は複雑であり、そんなに簡単ではない。どういう結果にいきつくのかわからない計算が続いて、最後に突然シンプルな結果が現れる。

３分割（３分身）の導出の方法の概要を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数

$\sin x/e^{a} + \sin 2x/e^{2a} + \sin 3x/e^{3a} + \sin 4x/e^{4a} + \cdots = \sin x/\{2(\mathrm{ch}a - \cos x)\}$ ---①

(－π≦x≦π, a＞0)

まず①のｘに3π/6(つまりπ/2)を代入し、以下の１分身（②）を即座に得る。

$1/e^{a} - 1/e^{3a} + 1/e^{5a} - 1/e^{7a} + 1/e^{9a} - 1/e^{11a} + 1/e^{13a} - 1/e^{15a} + 1/e^{17a} - 1/e^{19a} + 1/e^{21a} - 1/e^{23a} + \cdots = 1/(2\mathrm{ch}a)$ --②

次に①のｘに2π/6（つまりπ/3）を代入して、次を得る。

$1/e^{a} + 1/e^{2a} - 1/e^{4a} - 1/e^{5a} + 1/e^{7a} + 1/e^{8a} - 1/e^{10a} - 1/e^{11a} + 1/e^{13a} + 1/e^{14a} - 1/e^{16a} - 1/e^{17a} + \cdots$

$= 1/(2\mathrm{ch}a - 1)$ --③

次に①のｘにπ/6を代入して、次を得る。

$(1/2)(1/e^{a} + 1/e^{5a} - 1/e^{7a} - 1/e^{11a} + 1/e^{13a} + 1/e^{17a} - 1/e^{19a} - 1/e^{23a} + \cdots)$

$+(\sqrt{3}/2)(1/e^{2a} + 1/e^{4a} - 1/e^{8a} - 1/e^{10a} + 1/e^{14a} + 1/e^{16a} - 1/e^{20a} - 1/e^{22a} + \cdots)$

$+(1/e^{3a} - 1/e^{9a} + 1/e^{15a} - 1/e^{21a} + 1/e^{27a} - 1/e^{33a} + \cdots) = 1/\{2(2\mathrm{ch}a - \sqrt{3})\}$ ----④

この④の左辺の第２項の$(1/e^{2a} + 1/e^{4a} - 1/e^{8a} - 1/e^{10a} + 1/e^{14a} + 1/e^{16a} - 1/e^{20a} - 1/e^{22a} + \cdots)$は等比級数への変形で次のように簡単に求まる。

$1/e^{2a} + 1/e^{4a} - 1/e^{8a} - 1/e^{10a} + 1/e^{14a} + 1/e^{16a} - 1/e^{20a} - 1/e^{22a} + \cdots$

$= (1/e^{2a} - 1/e^{8a} + 1/e^{14a} - 1/e^{20a} + \cdots) + (1/e^{4a} - 1/e^{10a} + 1/e^{16a} - 1/e^{22a} + \cdots)$

$= \mathrm{ch}a/\mathrm{ch}3a$

④の左辺の第３項$(1/e^{3a} - 1/e^{9a} + 1/e^{15a} - 1/e^{21a} + 1/e^{27a} - 1/e^{33a} + \cdots)$は②から簡単に求まり、次となる。

$1/e^{3a} - 1/e^{9a} + 1/e^{15a} - 1/e^{21a} + 1/e^{27a} - 1/e^{33a} + \cdots = 1/(2\mathrm{ch}3a)$

さらに、③の左辺から部分的に抽出される級数$(1/e^{2a} - 1/e^{4a} + 1/e^{8a} - 1/e^{10a} + 1/e^{14a} - 1/e^{16a} + \cdots)$の値も求めておこう。これも等比級数への変形で次のように簡単に求まる。

$1/e^{2a} - 1/e^{4a} + 1/e^{8a} - 1/e^{10a} + 1/e^{14a} - 1/e^{16a} + \cdots$

$= (1/e^{2a} + 1/e^{8a} + 1/e^{14a} + \cdots) + (-1/e^{4a} - 1/e^{10a} - 1/e^{16a} - \cdots)$

$= \mathrm{sh}a/\mathrm{sh}3a$

さて、ここでB1,B2,B3を次の級数として定義しよう。

$B1 = 1/e^{a} - 1/e^{11a} + 1/e^{13a} - 1/e^{23a} + 1/e^{25a} - 1/e^{35a} + \cdots$

$B2 = 1/e^{3a} - 1/e^{9a} + 1/e^{15a} - 1/e^{21a} + 1/e^{27a} - 1/e^{33a} + \cdots$

$B3 = 1/e^{5a} - 1/e^{7a} + 1/e^{17a} - 1/e^{19a} + 1/e^{29a} - 1/e^{31a} + \cdots$

以上で３分割を求める前準備ができた。ここまでの準備から②、③、④は次のようになる。

B1 −B2 +B3＝1/(2cha)　 ----②-2

B1 −B3 +sha/sh3a＝1/(2cha −1)　 ----③-2

(1/2)(B1 +B3) +(√3/2)cha/ch3a +1/(2ch3a)＝1/{2(2cha −√3)} ----④-2

この連立方程式を解いて、B1,B2,B3 は次となる。

$B1=1/e^{a}-1/e^{11a}+1/e^{13a}-1/e^{23a}+1/e^{25a}-1/e^{35a}+\cdots=sh5a/sh6a$

$B2=1/e^{3a}-1/e^{9a}+1/e^{15a}-1/e^{21a}+1/e^{27a}-1/e^{33a}+\cdots=1/(2ch3a)$

$B3=1/e^{5a}-1/e^{7a}+1/e^{17a}-1/e^{19a}+1/e^{29a}-1/e^{31a}+\cdots=sha/sh6a$

これで、②(１分身)の３分割が得られた。

導出終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして３分割が得られた。

途中の複雑なところは省いたが、最終に行きつくまで実際はなかなか大変である。ゼータの分割でも計算は大変であったが、それは単に長いというだけで難しくはなかった。

半年ほど前からはじめたゼータの香りの漂う公式の分割や、またΣsin(nx)/ena フーリエ級数に由来する

$$1/e^{a}-1/e^{3a}+1/e^{5a}-1/e^{7a}+1/e^{9a}-1/e^{11a}+1/e^{13a}-1/e^{15a}+\cdots=1/(2cha)$$

の分割を求めるのは、大変な作業である。

その大変さは三角関数と双曲線関数が入り混じった複雑な計算にある。その深く暗いトンネルを抜け出すことができるかどうかが鍵となる。

なお、今回の３分身も Excel で数値検証を行ったが、正しい結果であった。左辺の級数は右辺値に急速に収束する。

今回の結果を再掲しよう。

****

＜１分割＞

$$1/e^{a}-1/e^{3a}+1/e^{5a}-1/e^{7a}+1/e^{9a}-1/e^{11a}+1/e^{13a}-1/e^{15a}+\cdots=1/(2cha) \quad ----②$$

＜３分割＞

$$B1=1/e^{a}-1/e^{11a}+1/e^{13a}-1/e^{23a}+1/e^{25a}-1/e^{35a}+\cdots=sh5a/sh6a$$

$$B2=1/e^{3a}-1/e^{9a}+1/e^{15a}-1/e^{21a}+1/e^{27a}-1/e^{33a}+\cdots=1/(2ch3a)$$

$$B3=1/e^{5a}-1/e^{7a}+1/e^{17a}-1/e^{19a}+1/e^{29a}-1/e^{31a}+\cdots=sha/sh6a$$

B1,−B2,B3 が３分身である。すなわち、B1 +(−B2) +B3＝１分身(②)となる。

****

味わいのある結果であり、右辺の簡潔な形が素晴らしい。なお B2 は実質的に②の１分身と同じものである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ４分割をいま求めている最中だが、これがまた複雑な計算になって、ギブアップ気味である。
最終はきれいな結果になるはずだが、そこまで行く気力がわかないほどの複雑さである。なにか別の発想というか工夫で切り抜けられればよいのだが・・

●B1 +(-B2) +B3＝１分身(②)を右辺値に着目して表すと、次を得る。

sh5a/sh6a -1/(2ch3a)+ sha/sh6a＝1/(2cha)

変形すると、次のようになる。

sh5a/sh6a + sha/sh6a＝(1/cha +1/ch3a)/2 ----⑤

a：任意の実数。0 のときは a->0

きれいな式（恒等式）である。一見して成立は自明とは思えないが、たしかに成り立っている。双曲線関数の加法定理を使って、左辺から右辺を直接導けると思う。

ところで、a＝a・i として(i は虚数単位)、三角関数に直しても当然成り立っている。

sin5a/sin6a + sina/sin6a＝(1/cosa +1/cos3a)/2

● 気づいたことがある。

$1/e^{a} -1/e^{3a} +1/e^{5a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{11a} +1/e^{13a} -1/e^{15a}$ +・・＝1/(2cha) -----②

それは、「②の両辺を(a に関し)微分して無数に出る以下の級数の分身も、②の分身が求まっていればその両辺を微分するだけで即座に求まる」ということである。

②の１回微分⇒ $1/e^{a} -3/e^{3a} +5/e^{5a} -7/e^{7a} +9/e^{9a} -11/e^{11a} +13/e^{13a} -15/e^{15a}$ +・・＝略
②の２回微分⇒ $1/e^{a} -3^{2}/e^{3a} +5^{2}/e^{5a} -7^{2}/e^{7a} +9^{2}/e^{9a} -11^{2}/e^{11a} +13^{2}/e^{13a} -15^{2}/e^{15a}$ +・・＝略
②の３回微分⇒ $1/e^{a} -3^{3}/e^{3a} +5^{3}/e^{5a} -7^{3}/e^{7a} +9^{3}/e^{9a} -11^{3}/e^{11a} +13^{3}/e^{13a} -15^{3}/e^{15a}$ +・・＝略

・

・

よって例えば、②の３分身が求まれば、上記一連の級数の３分身もすぐに出ることになる。すなわち、それは、「②の分身が求まれば、無数の上記級数の対応する分身が求まったことと同じである」と言える。

すごい構造である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.1.4 杉岡幹生

参考文献

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）