＜ Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数の分割（１分割、２分割）＞

14 年前に研究した下記の２種類のフーリエ級数が再び気になり（佐藤郁郎氏も多く結果を出された)、しばらくその方面を調べていきたい。

スワン彗星　その７ (biglobe.ne.jp)、　スワン彗星　その８ (biglobe.ne.jp)、　スワン彗星　その９ (biglobe.ne.jp)、　スワン彗星　その１０ (biglobe.ne.jp)

なお、sh, ch はそれぞれ双曲線関数 sinh, cosh を略記したものである。よって cha, sha や ch2a などはそれぞれ cosh(a), sinh(a), cosh(2a)の意味である。e は自然対数の底である。

$$\sin x/e^{a} +\sin 2x/e^{2a} +\sin 3x/e^{3a} +\sin 4x/e^{4a} +\cdot\cdot = \sin x/\{2(\mathrm{cha}-\cos x)\}$$
$$(-\pi \leqq x \leqq \pi,\ a>0)$$

$$\cos x/e^{a} +\cos 2x/e^{2a} +\cos 3x/e^{3a} +\cos 4x/e^{4a} +\cdot\cdot = -1/2 +\mathrm{sha}/\{2(\mathrm{cha}-\cos x)\}$$
$$(-\pi \leqq x \leqq \pi,\ a>0)$$

これらはきれいな形をしたフーリエ級数であり、公式集にも載っている。

この４年半でゼータとゼータ香り式の分割を行ってきたが、だんだんと分かってきたことがある。それは、フーリエ級数があるならば、それがどんなものであれ、そこから出る級数は分割できるという面白い事実である。そのことが分かったので、それをゼータ以外へも展開したい。

そこで第一弾として上記のフーリエ級数を調べていく。今後、上の方を“Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数”、下の方を“Σcos(nx)/e^{na} フーリエ級数”と呼ぶことにしよう。

まずは、Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数から見ていくことにする。今回は１分割と２分割を求めた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Σsin(nx)/e^{na} フーリエ級数の分割

$$\sin x/e^{a} +\sin 2x/e^{2a} +\sin 3x/e^{3a} +\sin 4x/e^{4a} +\cdot\cdot = \sin x/\{2(\mathrm{cha}-\cos x)\} \quad \text{---①}$$
$$(-\pi \leqq x \leqq \pi,\ a>0)$$

①の x にπ/2 を代入し、以下の１分身(②)を得る。x にπ/4 を代入した結果と②から２分身(A1,-A2)を得る。

＜１分割＞

$$1/e^{a} -1/e^{3a} +1/e^{5a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{11a} +1/e^{13a} -1/e^{15a} +\cdot\cdot = 1/(2\mathrm{cha}) \quad \text{----②}$$

＜２分割＞

$$A1 = 1/e^{a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{15a} +1/e^{17a} -1/e^{23a} +\cdot\cdot = 1/(4\mathrm{cha}) +\mathrm{cha}/(2\mathrm{ch2a})$$
$$A2 = 1/e^{3a} -1/e^{5a} +1/e^{11a} -1/e^{13a} +1/e^{19a} -1/e^{21a} +\cdot\cdot = -1/(4\mathrm{cha}) +\mathrm{cha}/(2\mathrm{ch2a})$$

A1,-A2 が２分身である。すなわち、A1 +(-A2)＝１分身(②)となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

分身の値は、このように大変美しいものになった！これらは秩序ある方法で割合簡単に得ることができる。導出の方法を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

$\Sigma \sin(nx)/e^{na}$ フーリエ級数

$\sin x/e^{a} + \sin 2x/e^{2a} + \sin 3x/e^{3a} + \sin 4x/e^{4a} + \cdots = \sin x/\{2(\mathrm{ch}a - \cos x)\}$ ---①

$(-\pi \leqq x \leqq \pi,\ a > 0)$

①の x に π/2 を代入し、以下の１分身（②）を即座に得る。

$1/e^{a} - 1/e^{3a} + 1/e^{5a} - 1/e^{7a} + 1/e^{9a} - 1/e^{11a} + 1/e^{13a} - 1/e^{15a} + 1/e^{17a} - 1/e^{19a} + 1/e^{21a} - 1/e^{23a} + \cdots = 1/(2\mathrm{ch}a)$ --②

次に①の x に π/4 を代入すると、次を得る。

$(1/\sqrt{2})(1/e^{a} + 1/e^{3a} - 1/e^{5a} - 1/e^{7a} + 1/e^{9a} + 1/e^{11a} - 1/e^{13a} - 1/e^{15a} + 1/e^{17a} + 1/e^{19a} - 1/e^{21a} - 1/e^{23a} + \cdots)$

$+ (1/e^{2a} - 1/e^{6a} + 1/e^{10a} - 1/e^{14a} + 1/e^{18a} - 1/e^{22a} + \cdots) = (1/\sqrt{2})/(2\mathrm{ch}a - \sqrt{2})$

左辺の第２項の級数の値は②から容易に分かり、その値は 1/(2ch2a) となる。それを用いて上式を整理すると、次となる。

$1/e^{a} + 1/e^{3a} - 1/e^{5a} - 1/e^{7a} + 1/e^{9a} + 1/e^{11a} - 1/e^{13a} - 1/e^{15a} + 1/e^{17a} + 1/e^{19a} - 1/e^{21a} - 1/e^{23a} + \cdots$

$= 1/(2\mathrm{ch}a - \sqrt{2}) - 1/(\sqrt{2} \cdot \mathrm{ch}2a)$ ----③

ここで A1、A2 を次の級数として定義しよう。

$A1 = 1/e^{a} - 1/e^{7a} + 1/e^{9a} - 1/e^{15a} + 1/e^{17a} - 1/e^{23a} + \cdots$

$A2 = 1/e^{3a} - 1/e^{5a} + 1/e^{11a} - 1/e^{13a} + 1/e^{19a} - 1/e^{21a} + \cdots$

この A1,A2 を使うと、②、③はそれぞれ次のようになる。

$A1 - A2 = 1/(2\mathrm{ch}a)$

$A1 + A2 = 1/(2\mathrm{ch}a - \sqrt{2}) - 1/(\sqrt{2}\mathrm{ch}2a)$

これを連立方程式として解いて、A1,A2 の値は次のようになる（右辺値）。

$A1 = 1/e^{a} - 1/e^{7a} + 1/e^{9a} - 1/e^{15a} + 1/e^{17a} - 1/e^{23a} + \cdots = 1/(4\mathrm{ch}a) - 1/(2\sqrt{2} \cdot \mathrm{ch}2a) + 1/(4\mathrm{ch}a - 2\sqrt{2})$

$A2 = 1/e^{3a} - 1/e^{5a} + 1/e^{11a} - 1/e^{13a} + 1/e^{19a} - 1/e^{21a} + \cdots = -1/(4\mathrm{ch}a) - 1/(2\sqrt{2} \cdot \mathrm{ch}2a) + 1/(4\mathrm{ch}a - 2\sqrt{2})$

右辺はさらに２倍角の公式を使って、さらに簡単化でき、結局、次のようになる。

$A1 = 1/e^{a} - 1/e^{7a} + 1/e^{9a} - 1/e^{15a} + 1/e^{17a} - 1/e^{23a} + \cdots = 1/(4\mathrm{ch}a) + \mathrm{ch}a/(2\mathrm{ch}2a)$

$A2 = 1/e^{3a} - 1/e^{5a} + 1/e^{11a} - 1/e^{13a} + 1/e^{19a} - 1/e^{21a} + \cdots = -1/(4\mathrm{ch}a) + \mathrm{ch}a/(2\mathrm{ch}2a)$

導出終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　このようにして１分身、２分身が求まった。いつも感じるのは、導出の過程の味わいの深さである。
Excel マクロで数値検証も行ったが、正しい結果であった。収束が速く検証は容易である。

　再び結果を眺めよう。

＜１分割＞

$$1/e^{a} -1/e^{3a} +1/e^{5a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{11a} +1/e^{13a} -1/e^{15a} +\cdots=1/(2\mathrm{ch}a) \quad \text{----②}$$

＜２分割＞

$$A1=1/e^{a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} -1/e^{15a} +1/e^{17a} -1/e^{23a} +\cdots=1/(4\mathrm{ch}a) +\mathrm{ch}a/(2\mathrm{ch}2a)$$
$$A2=1/e^{3a} -1/e^{5a} +1/e^{11a} -1/e^{13a} +1/e^{19a} -1/e^{21a} +\cdots=-1/(4\mathrm{ch}a) +\mathrm{ch}a/(2\mathrm{ch}2a)$$

２分割（２分身）から容易に１分割（１分身）が得られ、わかりやすい形である。すなわち、
　$A1 +(-A2)$＝１分身(②)
となっている。単純明快である！
　これは、３分割、４分割、５分割、・・・でも同じであるはずであり、無限にきれいに②が割れていくことになる。
なお、今回の分割は、過去に行ってきたゼータの分割との関連で言えば次のL(1)分割に対応するものとなっている。

****
■L(1)１分割

$$1 -1/3 +1/5 -1/7 + 1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +1/17 -1/19 +\cdots =\pi/4$$

■L(1)２分割

$$B1= 1 -1/7 +1/9 -1/15 +1/17 -1/23 +\cdots =(\pi/8)(1 +\sqrt{2})$$
$$B2=1/3 -1/5 +1/11 -1/13 +1/19 -1/21 +\cdots=(\pi/8)(-1 +\sqrt{2})$$

　B1,-B2 が２分身である。すなわち、$B1+(-B2)=\pi/4=L(1)$である。
****

さらについでに＜導出の方法＞の中に出てくる③の右辺はもっと簡単化できて、A1+A2 で結局、次のようになる。

$$1/e^{a} +1/e^{3a} -1/e^{5a} -1/e^{7a} +1/e^{9a} +1/e^{11a} -1/e^{13a} -1/e^{15a} +1/e^{17a} +1/e^{19a} -1/e^{21a} -1/e^{23a} +\cdots=\mathrm{ch}a/\mathrm{ch}2a$$

　この簡明さ！！
これは、上のL(1)２分割のB1+B2 で構成される

$$1 +1/3 -1/5 -1/7 + 1/9 +1/11 -1/13 -1/15 +1/17 +1/19 -1/21 -1/23 +\cdots =\pi\sqrt{2}/4$$

に対応するものである。
　これは虚２次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ “$1 +1/3^{s} -1/5^{s} -1/7^{s} +1/9^{s} +1/11^{s} -1/13^{s} -1/15^{s} +\cdots$“の s＝1 の場合のものである。

　最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●　今回のフーリエ級数の分身たちの値も、ゼータやゼータ香り式におとらず興味あるものである。

これら分身の値を解にもつ方程式を求めることも面白そうである。それらの方程式を構成する多項式は直交多項式となっているような気がする。

　チェビシェフ多項式、ラゲール多項式など知られた直交多項式はいくつもある。

しかしそこに任意のａ(＞0)など入り込んでいない。任意のａが入った直交多項式があるのではなかろうか。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.12.26 杉岡幹生

参考文献

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）