＜ Z(2)香り式の分身を解にもつ方程式　その２＞

----- Z(2)香り式の３分身を解に持つ方程式　------

Z(2)香り式の３分身を解に持つ方程式が出たので、今回はそれを示したい。反転型の分割方程式も示した。前回分まで求めた２分身までの分と、過去に得たZ(2)の分割方程式（(その１２０）や（その１１５)）とともに示す。

さらに整理の意味で、前回までに得たL(1)香り式分割方程式（とその反転方程式、L(1)分割方程式）も一緒に示した。

なお、ch, sh, thは、それぞれ双曲線関数cosh, sinh, tanhを略記したものである。

ここでZ(2)とは私が独自に用いている記法であり、以下のようにζ(2)と本質的に等しいものである（ζ(2)の定数倍)。

$Z(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots$

$= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 \cdots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \cdots)$

$= \zeta(2) - (1/2^2)\zeta(2) = (3/4)\zeta(2) = \pi^2/8$

さらに一般的に表現しておくと次となり、Z(s)はリーマン・ゼータζ(s)と本質的に同じものである。

$Z(s) = (1-1/2^s)\zeta(s)$

では結果を示すと、以下の通りである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Z(2)香り式分割方程式＞

$1/(1^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) + 1/(7^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) + 1/(11^2+a^2) + \cdots = (\pi/(4a))\,th(a\pi/2)$

aは任意の実数。

このZ(2)香り式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。例えば、[2分身解方程式]は、「Z(2)香り式の２分身の値を解に持つ方程式」の意味である。

［１分身解方程式］⇒ $(\pi/4)ch(a\pi/2)\cdot x - (sh(a\pi/2))/a = 0$

［２分身解方程式］⇒ $(\pi/8)^2 ch(a\pi/2)\cdot x^2 - (\pi/4)\{(sh(a\pi/2))/a\}\cdot x + 2sh^2(a\pi/4)/a^2 = 0$

［３分身解方程式］⇒ $(\pi/12)^3 ch(a\pi/2)\cdot x^3 - (\pi/12)^2\{3sh(a\pi/2)/a\}\cdot x^2$

$+ (\pi/12)\{3sh^2(a\pi/3)\cdot(2ch(a\pi/3)-1)/(ch(a\pi/2)\cdot a^2)\}\cdot x - 4sh^3(a\pi/6)/a^3 = 0$

＜Z(2)分割方程式＞

$1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots = \pi^2/8$

このZ(2)式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式]⇒ $x - 2 = 0$

［２分身解方程式]⇒ $x^2 - 8x + 8 = 0$

［３分身解方程式］⇒ $x^3 -18x^2 +48x -32=0$

［４分身解方程式］⇒ $x^4 -32x^3 +160x^2 -256x +128=0$

［５分身解方程式］⇒ $x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512=0$

［６分身解方程式］⇒ $x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$

［７分身解方程式］⇒ $x^7 -98x^6 +1568x^5 -9408x^4 +26880x^3 -39424x^2 +28672x -8192=0$

・・・・・・・・・・

＜Z(2)反転型香り式分割方程式＞

$1/(1^2-a^2) +1/(3^2-a^2) +1/(5^2-a^2) +1/(7^2-a^2) +1/(9^2-a^2) +1/(11^2-a^2) +\cdots =(\pi/4)\tan(a\pi/2)$

a は任意の実数。

このＺ(2)反転型香り式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式］⇒ $(\pi/4)\cos(a\pi/2)\cdot x - (\sin(a\pi/2))/a=0$

［２分身解方程式］⇒ $(\pi/8)^2\cos(a\pi/2)\cdot x^2 -(\pi/4)\{(\sin(a\pi/2))/a\}\cdot x +2\sin^2(a\pi/4)/a^2=0$

［３分身解方程式］⇒ $(\pi/12)^3\cos(a\pi/2)\cdot x^3 -(\pi/12)^2\{3\sin(a\pi/2)/a\}\cdot x^2$
$+(\pi/12)\{3\sin^2(a\pi/3)\cdot(2\cos(a\pi/3)-1)/(\cos(a\pi/2)\cdot a^2)\}\cdot x -4\sin^3(a\pi/6)/a^3=0$

＜L(1)香り式分割方程式＞

$1/(1^2+a^2) -3/(3^2+a^2) +5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -11/(11^2+a^2) +\cdots =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

a は任意の実数。

このＬ(1)香り式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x -1=0$

［２分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2 -2x -1=0$

［３分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^3 -3x^2 -3\mathrm{ch}(a\pi/6)\cdot x +1=0$

［４分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^4 -4x^3 -(2+4\mathrm{ch}(a\pi/4))x^2 +4x +1=0$

［５分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^5 -5x^4 -10\mathrm{ch}(a\pi/10)\mathrm{ch}(a\pi/5)\cdot x^3 +10x^2 +5\mathrm{ch}(a\pi/10)\cdot x -1=0$

＜L(1)分割方程式＞

$1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +\cdots =\pi/4$

このＬ(1)式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式］⇒ $x -1=0$

［２分身解方程式］⇒ $x^2 -2x -1=0$

［３分身解方程式］⇒ $x^3 -3x^2 -3x +1=0$

［４分身解方程式］⇒ $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$

［５分身解方程式］⇒ $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$

［６分身解方程式］⇒ $x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$

［７分身解方程式］⇒ $x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$

・・・・・・・・・・・

＜L(1)反転型香り式分割方程式（反転方程式）＞

$$1/(1^2-a^2)\ -3/(3^2-a^2)\ +5/(5^2-a^2)\ -7/(7^2-a^2)\ +9/(9^2-a^2)\ -11/(11^2-a^2)\ +\cdot\cdot\quad =(\pi/4)/\cos(a\pi/2)$$

このL(1)反転型香り式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式］⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x\ -1=0$

［２分身解方程式］⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^2\ -2x\ -1=0$

［３分身解方程式］⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^3\ -3x^2\ -3\cos(a\pi/6)\cdot x\ +1=0$

［４分身解方程式］⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^4\ -4x^3\ -(2+4\cos(a\pi/4))x^2\ +4x\ +1=0$

［５分身解方程式］⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^5\ -5x^4\ -10\cos(a\pi/10)\cos(a\pi/5)\cdot x^3\ +10x^2\ +5\cos(a\pi/10)\cdot x\ -1=0$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。今回出した方程式は、Z(2)香り式の[３分身解方程式]だが、きれいなものではない。

［３分身解方程式］⇒ $(\pi/12)^3\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^3\ -(\pi/12)^2\{3\mathrm{sh}(a\pi/2)/a\}\cdot x^2$
$+(\pi/12)\{3\mathrm{sh}^2(a\pi/3)\cdot(2\mathrm{ch}(a\pi/3)-1)/(\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot a^2)\}\cdot x\ -4\mathrm{sh}^3(a\pi/6)/a^3=0$

もしかしたらもっときれいにできるかもしれないが、何日にもわたって計算してもこれ以上きれいにならなかった。とくにx項が醜い・・

美しさという面では、L(1)香り式の方がはるかに勝る。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●Z(2)香り式分割方程式はπが露わに出てしまう。Z(2)香り式の場合は、aがゼロのとき、ロピタルの定理を使う必要があるためにこのようなことになる。

●L(1)香り式分割方程式とL(1)分割方程式を見比べたい。
L(1)香り式のch(～)を１に置き換えれば、それはL(1)のものに一致する。これはaが０のときch(～)=1となるためで、当然といえば当然であるが、しかし面白い規則であると思う。

＜L(1)香り式分割方程式＞

［１分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x\ -1=0$

［２分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2\ -2x\ -1=0$

［３分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^3\ -3x^2\ -3\mathrm{ch}(a\pi/6)\cdot x\ +1=0$

［４分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^4\ -4x^3\ -(2+4\mathrm{ch}(a\pi/4))x^2\ +4x\ +1=0$

［５分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^5\ -5x^4\ -10\mathrm{ch}(a\pi/10)\mathrm{ch}(a\pi/5)\cdot x^3\ +10x^2\ +5\mathrm{ch}(a\pi/10)\cdot x\ -1=0$

<L(1)分割方程式>

[１分身解方程式]⇒ $x-1=0$

[２分身解方程式]⇒ $x^2-2x-1=0$

[３分身解方程式]⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$

[４分身解方程式]⇒ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$

[５分身解方程式]⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$

[６分身解方程式]⇒ $x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$

[７分身解方程式]⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$

・・・・・・・・・・・

●Z(2)香り式の分身を解に持つ方程式（分割方程式）を求めるのは、計算がかなり大変である。L(1)香り式の場合も大変ではあるが、しかしL(1)香り式では最終到着地点で美しい式が出現する。それはL(3)香り式でも同じであろうと予想される。Z(2)香り式はこれくらいにして、L(3)香り式の分割方程式に移りたいと思う。

●上方で示した反転方程式は、公式集にもある三角関数の部分分数展開式に“本質的に”等しいものである。

●L(3)香り式は次のものである。（その２４６）や（その２４７）で見たものだが、極めて興味深い形をしている。とくに右辺！

$$1/(1^4+4a^4)-3/(3^4+4a^4)+5/(5^4+4a^4)-7/(7^4+4a^4)+9/(9^4+4a^4)-11/(11^4+4a^4)+13/(13^4+4a^4)-15/(15^4+4a^4)+\cdots$$
$$=(\pi/(2a)^2)\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$$

aは任意の実数（0の場合 a->0）。

この分身たちを解に持つ方程式（分割方程式）を求めることは重要なことであると思われる。

そして、その反転方程式とその分身たちは、上式の a を $a\cdot i^{1/2}$ に置き換えて（i：虚数単位）出すことになるが、それはまた味わいのある世界である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.12.18 杉岡幹生

参考文献

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)