＜ Z(2)香り式の分身を解にもつ方程式　その１＞

前回、L(1)分割方程式の５次までを示したが、６次以上は計算が大変なのでその方向は一旦休止としたい。「Z(2)香り式の分身の値を解にもつ方程式はどうなるのか？」が気になり調べた結果、２分割のもの(２次方程式)まで得られたので、今回はそれを示す。

ここでZ(2)とは私が独自に用いている記法であり、以下のようにζ(2)と本質的に等しいものである（ζ(2)の定数倍)。

$Z(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots$

$= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 \cdots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \cdots)$

$= \zeta(2) - (1/2^2)\zeta(2) = (3/4)\zeta(2) = \pi^2/8$

さらにもっと一般的に表現しておくと次となり、Z(s)はリーマン・ゼータζ(s)と本質的に同じものである。

$Z(s) = (1-1/2^s)\zeta(s)$

リーマン・ゼータはζ(s)の形よりZ(s)の方が扱いやすく、本シリーズではもっぱらZ(s)を用いているので、注意されたい。

さて今回、Z(2)香り式の１分身、２分身の値を解に持つ方程式が得られたので、それらを示す。過去に得たZ(2)の分割方程式（(その１２０）や（その１１５)）とともに以下に示した。

整理の意味で、前回までに得たL(1)香り式分割方程式（とその反転方程式、L(1)分割方程式）も一緒に示した。なお、ch, sh, thは、それぞれ双曲線関数cosh, sinh, tanhを略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Z(2)香り式分割方程式＞

$1/(1^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) + 1/(7^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) + 1/(11^2+a^2) + \cdots = (\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2)$ ------①

a は任意の実数。

上記①のZ(2)香り式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。例えば、[2分身解方程式]は、「Z(2)香り式２分身の値を解に持つ方程式」の意味である。

［１分身解方程式］⇒ $(\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x - (\mathrm{sh}(a\pi/2))/a = 0$

［２分身解方程式］⇒ $(\pi/8)^2\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2 - (\pi/4)\{(\mathrm{sh}(a\pi/2))/a\}\cdot x + (\mathrm{ch}(a\pi/2)-1)/a^2 = 0$

＜Z(2)分割方程式＞

$1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots = \pi^2/8$ ------②

上記②のZ(2)式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式]⇒ $x - 2 = 0$

［２分身解方程式]⇒ $x^2 - 8x + 8 = 0$

[３分身解方程式]⇒ $x^3 -18x^2 +48x -32=0$

[４分身解方程式]⇒ $x^4 -32x^3 +160x^2 -256x +128=0$

[５分身解方程式]⇒ $x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512=0$

[６分身解方程式]⇒ $x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$

[７分身解方程式]⇒ $x^7 -98x^6 +1568x^5 -9408x^4 +26880x^3 -39424x^2 +28672x -8192=0$

・・・・・・・・・・

＜L(1)香り式分割方程式＞

$1/(1^2+a^2) -3/(3^2+a^2) +5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -11/(11^2+a^2) +\cdots =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ -----①

a は任意の実数。

上記①のＬ(1)香り式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

[１分身解方程式] ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x -1=0$

[２分身解方程式] ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2 -2x -1=0$

[３分身解方程式] ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^3 -3x^2 -3\mathrm{ch}(a\pi/6)\cdot x +1=0$

[４分身解方程式] ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^4 -4x^3 -(2+4\mathrm{ch}(a\pi/4))x^2 +4x +1=0$

[５分身解方程式] ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^5 -5x^4 -10\mathrm{ch}(a\pi/10)\mathrm{ch}(a\pi/5)\cdot x^3 +10x^2 +5\mathrm{ch}(a\pi/10)\cdot x -1=0$

＜L(1)分割方程式＞

$1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +\cdots =\pi/4$ ------②

上記②のＬ(1)式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

[１分身解方程式]⇒ $x -1=0$

[２分身解方程式]⇒ $x^2 -2x -1=0$

[３分身解方程式]⇒ $x^3 -3x^2 -3x +1=0$

[４分身解方程式]⇒ $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$

[５分身解方程式]⇒ $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$

[６分身解方程式]⇒ $x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$

[７分身解方程式]⇒ $x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$

・・・・・・・・・・

＜L(1)反転型香り式分割方程式（反転方程式）＞

$1/(1^2-a^2) -3/(3^2-a^2) +5/(5^2-a^2) -7/(7^2-a^2) +9/(9^2-a^2) -11/(11^2-a^2) +\cdots =(\pi/4)/\cos(a\pi/2)$ -----③

上記③のＬ(1)反転型香り式の分身の値を解にもつ方程式を以下に示す。

[１分身解方程式] ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x -1=0$

[２分身解方程式] ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^2 -2x -1=0$

[３分身解方程式] ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^3 -3x^2 -3\cos(a\pi/6)\cdot x +1=0$

［４分身解方程式］ ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^4 -4x^3 -(2+4\cos(a\pi/4))x^2 +4x +1=0$
［５分身解方程式］ ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^5 -5x^4 -10\cos(a\pi/10)\cos(a\pi/5)\cdot x^3 +10x^2 +5\cos(a\pi/10)\cdot x -1=0$
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにＺ(2)香り式分割方程式は、Ｌ(1)香り式のようなきれいな形ではなく、いびつな感じのするものとなった。

求める際は、Ｚ(2)分割方程式を求める場合とまったく同じようにして求めていった。すなわち、１分身の場合は$(\pi/4)^2$を、２分身の場合は$(\pi/8)^2$を除いた値を解にもつ方程式を求めた。ここはＬ(1)香り式の場合のような素直な形になっていないので、計算に神経を使った。

Ｌ(1)香り式分割方程式は、Ｌ(1)分割方程式とたいへんな類似性があり、美しい関係性から成っている。

一方、Ｚ(2)香り式分割方程式の場合は、一見してＺ(2)分割方程式と似ていない。

なぜそんなことになるかというと、Ｚ(2)香り式の分身からＺ(2)を出すには、ａを素直に０にできず、a->0 のように０に近づけていく必要があるからである。

Ｌ(s)香り式に比べ、Ｚ(s)香り式はよほどデリケートにできているといえるだろう。つまりロピタルの定理を使ってａを０に近づけていくと、Ｚ(2)香り式分割方程式はＺ(2)分割方程式に一致する。

例えば、

［２分身解方程式］ ⇒ $(\pi/8)^2\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2 -(\pi/4)\{(\mathrm{sh}(a\pi/2))/a\}\cdot x +(\mathrm{ch}(a\pi/2)-1)/a^2=0$

に対し、ａを０に近づけていくと、

［２分身解方程式］⇒ $x^2 -8x +8=0$

に一致する。

ここで、以下にＺ(2)香り式の１分割と２分割を示す（(その２３８）から)。

これを見ると、Ｚ(s)香り式の値からＺ(s)特殊値（つまりζ(s)特殊値）を求めるには、ロピタルの定理を使う必要があることがよくわかるであろう。

なお、これまでＺ(2)香り式を“Ｚ(2)類似香り式”と呼んでいたが、今後は、簡潔に“Ｚ(2)香り式”と呼ぶことにする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｚ(2)香り式　１分割＞

$1/(1^2+a^2) +1/(3^2+a^2) +1/(5^2+a^2) +1/(7^2+a^2) +1/(9^2+a^2) +1/(11^2+a^2) +\cdots =(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2)$

＜Ｚ(2)香り式　２分割＞

$1/(1^2+a^2) +1/(7^2+a^2) +1/(9^2+a^2) +1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2) +\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$

$1/(3^2+a^2) +1/(5^2+a^2) +1/(11^2+a^2) +1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2) -\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$

ａは任意の実数。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

さて、ここで上方で見たＺ(2)分割方程式を再び眺めよう。３年前に得たものであるが、チェビシェフ多項式も一緒に並べた。

****

＜Ｚ(2)分割方程式＞

$1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots = \pi^2/8$ ------②

上記②のＺ(2)式の分身を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式］⇒ $x - 2 = 0$

［２分身解方程式］⇒ $x^2 - 8x + 8 = 0$

［３分身解方程式］⇒ $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$

［４分身解方程式］⇒ $x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$

［５分身解方程式］⇒ $x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$

［６分身解方程式］⇒ $x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$

［７分身解方程式］⇒ $x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$

・・・・・・・・・・

[チェビシェフ多項式（第一種特殊チェビシェフ多項式）]

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

・・・・・・・・・・

****

上記で大事なことは、Ｚ(2)分割方程式がチェビシェフ多項式に本質的に等しいということである。変数変換($x=1/t^2$)をすれば、チェビシェフ多項式に移行するのである。一つ飛ばしで赤字のものに一致していく！
例えば、

［３分身解方程式］⇒ $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$

が

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

に対応している。

チェビシェフ多項式は、直交性を有する多項式であり極めて重要である。
三角関数を使うと任意の関数をフーリエ展開できるが、それと同じようにチェビシェフ多項式を使うと任意の関数を展開できる。

まだよくわかっていないが、Z(2)香り式分割方程式の多項式も直交多項式になっているのであろうか。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●Z(2)香り式分割方程式において、得られる解は<u>全て実数解</u>となる。厳密には予想だが、それは確実である。
　ということは、それらの方程式を固有方程式として持つ<u>エルミート行列</u>が存在しているに違いない。過去のゼータ分割の類似からそう思う。

●　ところで、a を a・i に置き換えた反転方程式はどうなるのか？　（i：虚数単位）
　下記のようになった。なるほど・・。虚数 i など消えてしまう！

＜Z(2)反転型香り式分割方程式（反転方程式）＞

$1/(1^2-a^2)+1/(3^2-a^2)+1/(5^2-a^2)+1/(7^2-a^2)+1/(9^2-a^2)+1/(11^2-a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\tan(a\pi/2)$
a は任意の実数。

このZ(2)反転型香り式の分身を解にもつ方程式（反転方程式）を以下に示す。

［１分身解方程式］⇒ $(\pi/4)\cos(a\pi/2)\cdot x-(\sin(a\pi/2))/a=0$
［２分身解方程式］⇒ $(\pi/8)^2\cos(a\pi/2)\cdot x^2-(\pi/4)\{(\sin(a\pi/2))/a\}\cdot x-(\cos(a\pi/2)-1)/a^2=0$

そしてL(1)香り式の分身（分割）を得るということは、下記のZ(2)反転型香り式の分身を得るということに本質的に等しくなるはずである。そうなると、反転方程式もすべて実数解をもつはずである。

Z(2)香り式のこのあたりの構造は、L(1)香り式の場合と完全に対応することになるだろう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.11.27 杉岡幹生

参考文献

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)