＜ L(1)香り式の分身を解にもつ方程式　その４＞

--- L(1)香り式の５分割、分割方程式とその反転方程式 ---

前回、L(1)香り式の分身を解にもつ方程式の５次までの方程式を示したが、L(1)香り式の５分割は、整理不足で提示できなかった。

今回は、その５分割（５分身）を提示し、香り式のこれまでに得た１次～５次の分割方程式を示すことにする。また前々回で見たそれらの反転方程式と、さらに過去に得たL(1)の分割方程式も一緒に並べる。

最後のつぶやきでは、エルミート行列と新種のゼータへの示唆をもう一度繰り返した。前回そのゼータの記法がよくなく、また気づきなどあって、新たな視点から書き直した。

では、まずL(1)香り式分割方程式を青色で示す。一緒にその反転方程式（茶色のもの）とL(1)分割方程式も示した。なお、ch, sh は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh を略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)香り式分割方程式＞

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ -----①

a は任意の実数。

上記①のL(1)香り式の分身を解にもつ方程式を以下に示す。例えば、[2分身解方程式]は、「L(1)香り式２分身の値を解に持つ方程式」の意味である。

［１分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x\ -1=0$

［２分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2\ -2x\ -1=0$

［３分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^3\ -3x^2\ -3\mathrm{ch}(a\pi/6)\cdot x\ +1=0$

［４分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^4\ -4x^3\ -(2+4\mathrm{ch}(a\pi/4))x^2\ +4x\ +1=0$

［５分身解方程式］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^5\ -5x^4\ -10\mathrm{ch}(a\pi/10)\mathrm{ch}(a\pi/5)\cdot x^3\ +10x^2\ +5\mathrm{ch}(a\pi/10)\cdot x\ -1=0$

＜L(1)分割方程式＞

$1\ -1/3\ +1/5\ -1/7\ +1/9\ -1/11\ +\cdots\ =\pi/4$ ------②

上記②のL(1)式の分身を解にもつ方程式を以下に示す。

[１分身解方程式]⇒ $x\ -1=0$

[２分身解方程式]⇒ $x^2\ -2x\ -1=0$

[３分身解方程式]⇒ $x^3\ -3x^2\ -3x\ +1=0$

[４分身解方程式]⇒ $x^4\ -4x^3\ -6x^2\ +4x\ +1=0$

[５分身解方程式]⇒ $x^5\ -5x^4\ -10x^3\ +10x^2\ +5x\ -1=0$

[６分身解方程式]⇒ $x^6\ -6x^5\ -15x^4\ +20x^3\ +15x^2\ -6x\ -1=0$

[７分身解方程式]⇒ $x^7\ -7x^6\ -21x^5\ +35x^4\ +35x^3\ -21x^2\ -7x\ +1=0$

・・・・・・・・・・

＜L(1)反転型香り式分割方程式（反転方程式）＞

$1/(1^2-a^2)\ -3/(3^2-a^2)\ +5/(5^2-a^2)\ -7/(7^2-a^2)\ +9/(9^2-a^2)\ -11/(11^2-a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\cos(a\pi/2)$ ----③

上記③のＬ(1)反転型香り式の分身を解にもつ方程式を以下に示す。

［１分身解方程式］ ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x\ -1=0$

［２分身解方程式］ ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^2\ -2x\ -1=0$

［３分身解方程式］ ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^3\ -3x^2\ -3\cos(a\pi/6)\cdot x\ +1=0$

［４分身解方程式］ ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^4\ -4x^3\ -(2+4\cos(a\pi/4))x^2\ +4x\ +1=0$

［５分身解方程式］ ⇒ $\cos(a\pi/2)\cdot x^5\ -5x^4\ -10\cos(a\pi/10)\cos(a\pi/5)\cdot x^3\ +10x^2\ +5\cos(a\pi/10)\cdot x\ -1=0$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら方程式における類似性を味わっていただきたい。
とても面白い形をしていて、ふしぎな感じがあり、いくら眺めても飽きないものがある・・

さて、③の反転型は、①でａ＝ａ・ｉとすれば（ｉは虚数単位）、即座に出る式であり、cosh(ix)＝cos(x)という関係から出る。

③そのものは公式集に載っている三角関数の部分分数展開式であり、1/cos(aπ2)の展開式に一致する。ただ、③の分割という観点は私の中ではこれまでなかったのだが、香り式を分割すると同時にこの反転型香り式の分割も得られるということに今回改めて気づいた。

ゼータ分割は、ゼータの分割だけで終わるが、ゼータ香り式の分割を行った場合は、その裏側世界の反転型香り式の分割も本質的に（同時に）求まっていくという面白いことになっているのである！

さて、Ｌ(1)香り式の５分割（５分身）を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)香り式の５分割＞

$A1=1/(1^2+a^2)\ -19/(19^2+a^2)\ +21/(21^2+a^2)\ -39/(39^2+a^2)\ +41/(41^2+a^2)\ -59/(59^2+a^2)\ +\cdots$

$=P[(4/5)\{\alpha\cdot ch(a\pi/10)\ +\beta\cdot ch(3a\pi/10)\}\ +\{k1\cdot ch(a\pi/5)\ +k2\cdot ch(2a\pi/5)+(2/5)(ch(a\pi/2)/ch(a\pi/10))\}]$ ---④

$A2=-3/(3^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +37/(37^2+a^2)\ -43/(43^2+a^2)\ +57/(57^2+a^2)\ +\cdots$

$=P[(4/5)\{\beta\cdot ch(a\pi/10)\ -\alpha\cdot ch(3a\pi/10)\}\ +\{-k2\cdot ch(a\pi/5)\ -k1\cdot ch(2a\pi/5)\ +(2/5)(ch(a\pi/2)/ch(a\pi/10))\}]$ ---⑤

$A3=5/(5^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +25/(25^2+a^2)\ -35/(35^2+a^2)\ +45/(45^2+a^2)\ -55/(55^2+a^2)\ +\cdots$

$=(\pi/4)/(5ch(a\pi/10))$ ---⑥

$A4=-7/(7^2+a^2)\ +13/(13^2+a^2)\ -27/(27^2+a^2)\ +33/(33^2+a^2)\ -47/(47^2+a^2)\ +53/(53^2+a^2)\ -\cdots$

$=P[(-4/5)\{\beta\cdot ch(a\pi/10)\ -\alpha\cdot ch(3a\pi/10)\}\ +\{-k2\cdot ch(a\pi/5)\ -k1\cdot ch(2a\pi/5)\ +(2/5)(ch(a\pi/2)/ch(a\pi/10))\}]$ ---⑦

$A5=9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +29/(29^2+a^2)\ -31/(31^2+a^2)\ +49/(49^2+a^2)\ -51/(51^2+a^2)\ +\cdots$

$=P[(-4/5)\{\alpha\cdot ch(a\pi/10)\ +\beta\cdot ch(3a\pi/10)\}\ +\{k1\cdot ch(a\pi/5)\ +k2\cdot ch(2a\pi/5)+(2/5)(ch(a\pi/2)/ch(a\pi/10))\}]$ ---⑧

ここで、P, α, β, k1, k2, a は、次の通りである。

$P=(\pi/8)/(\mathrm{ch}(a\pi/2))$, $\alpha=\cos(a\pi/10)$, $\beta=\cos(3\pi/10)$

$k1=(1+\sqrt{5})/\sqrt{5}$, $k2=(1-\sqrt{5})/\sqrt{5}$, a：任意の実数。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

５分割はこのようになった。分身たちを全部足し算すると、

$$A1 + A2 + A3 + A4 + A5 = 1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + 9/(9^2+a^2) - 11/(11^2+a^2) + \cdots = (\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

となって、大元の１分割(つまり①)に一致する。

なお、a が 0 のとき、上記は L(1)に一致する。$L(1)=1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \cdots = \pi/4$

また a が 0 のとき、例えば A1 は、L(1)の５分身の一つの

$$1 - 1/19 + 1/21 - 1/39 + 1/41 - 1/59 + \cdots = (\pi/8)\{2/5 + 2/\sqrt{5} + (2/5)\sqrt{(5+2\sqrt{5})}\}$$

に一致する。

さらに④～⑧で、a＝a・i とすれば（i は虚数単位)、③の反転型香り式の分身たちが即座に得られる。この点も面白い。これが上方で述べた「ゼータ香り式の分割を行った場合は、その裏側世界の反転型香り式の分割も本質的に（同時に）求まっていく」ということの意味である。

ゼータの香りの漂う公式の背後には、広い構造が潜んでいる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●L(1)香り式分割方程式とその反転方程式において、得られる解は全て実数解となる。厳密には予想だが、それは確実である。

　ということは、それらの方程式を固有方程式として持つエルミート行列が存在しているに違いない。過去のゼータ分割の類似からそう思う。

●香り式に関連する新種のゼータがあるのではないかと最近思い始めた。例えば、次のようなゼータが存在しているのではなかろうか。

$$\mathrm{scnt\_L}(s,a)=1/(1^{s+1}+a^{s+1}) - 3/(3^{s+1}+a^{s+1}) + 5/(5^{s+1}+a^{s+1}) - 7/(7^{s+1}+a^{s+1}) + \cdots$$

あるいは、反転型も考慮すれば、

$$\mathrm{scnt\_L}(s,a)=1/(1^{s+1}-a^{s+1}) - 3/(3^{s+1}-a^{s+1}) + 5/(5^{s+1}-a^{s+1}) - 7/(7^{s+1}-a^{s+1}) + \cdots$$

という形もありそうである。いや両者は同じか。

以下あたりからの類推だがどうだろうか。scnt は香りが漂うの意味”scented”からとった。

下式をみると、もう少し広い表式もあり得るのかもしれない。このゼータはフルヴィッツ・ゼータよりも深い対称性の世界に生きているような気がする。

a が 0 のときは L(s)に一致する。勘で「あるはず」と思っている段階であり、まだまだ茫漠としている。

下記の最後の二式は（その２６３）で、上から２番目は（その２４６）で見たものである。最後の二式は、フーリエ級数のまま・・

＜L(1)香り式　１分割＞

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

＜L(3)香り式　１分割＞

$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdots$

$=(\pi/(2a)^2)S1/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$，a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＜ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母８乗-A 型）＞

$1\cos x/(1^8+16a^8)\ -3\cos 3x/(3^8+16a^8)\ +5\cos 5x/(5^8+16a^8)\ -7\cos 7x/(7^8+16a^8)\ +\cdots$

$=(\pi\sqrt{2}/(64a^6))\{(K+L)P(x)\ +(-K+L)Q(x)\}/(K^2+L^2)$

＜ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母８乗-B 型）＞

$1^5\cos x/(1^8+16a^8)\ -3^5\cos 3x/(3^8+16a^8)\ +5^5\cos 5x/(5^8+16a^8)\ -7^5\cos 7x/(7^8+16a^8)\ +\cdots$

$=(\pi\sqrt{2}/(16a^2))\ \{(K-L)P(x)\ +(K+L)Q(x)\}/(K^2+L^2)$

$(-\pi/2\leqq x\leqq \pi/2)$

ここで、a, α, β, K, L, P(x), Q(x)は以下の通り。

a は任意の実数（0 の場合 a->0）。$\alpha=(a/2)\cos(\pi/8)$，$\beta=(a/2)\sin(\pi/8)$

$K=\mathrm{ch}(2\pi\alpha)\cos(2\pi\beta)+\cos(2\pi\alpha)\mathrm{ch}(2\pi\beta)$，　$L=\mathrm{sh}(2\pi\alpha)\sin(2\pi\beta)-\sin(2\pi\alpha)\mathrm{sh}(2\pi\beta)$

$P(x)=\sin(\pi\alpha+2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\alpha-2\alpha x)\cos(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\beta+2\beta x)+\mathrm{sh}(\pi\alpha+2\alpha x)\sin(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\beta-2\beta x)\cos(\pi\beta+2\beta x)$

$-\mathrm{ch}(\pi\alpha+2\alpha x)\cos(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\beta-2\beta x)\sin(\pi\beta+2\beta x)-\cos(\pi\alpha+2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\alpha-2\alpha x)\sin(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\beta+2\beta x)$

$Q(x)=\sin(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\beta+2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\alpha-2\alpha x)\sin(\pi\alpha+2\alpha x)+\mathrm{ch}(\pi\beta-2\beta x)\sin(\pi\beta+2\beta x)\sin(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\alpha+2\alpha x)$

$+\cos(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\beta+2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\alpha-2\alpha x)\cos(\pi\alpha+2\alpha x)+\mathrm{sh}(\pi\beta-2\beta x)\cos(\pi\beta+2\beta x)\cos(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\alpha+2\alpha x)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.11.24 杉岡幹生

参考文献

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)