＜ L(1)香り式の分身を解にもつ方程式　その３＞

--- L(1)香り式の５分割方程式の導出 ---

L(1)香り式の５分身を解にもつ５次の方程式が得られたので、それまでの分と合わせてそれを紹介したい。結論から示すと、以下となった。青字が今回導出した５次方程式である。

整理の意味で、過去のL(1)分割方程式も一緒に並べた。なお、ch, sh は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh を略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)香り式分割方程式＞

L(1)香り式の分身を解にもつ方程式を示す。

例えば、[2 分身解]は、「L(1)香り式２分身の値を解に持つ方程式」の意味である。

[１分身解] ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x -1=0$

[２分身解] ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x^2 -2x -1=0$

[３分身解] ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x^3 -3x^2 -3ch(a\pi/6)\cdot x +1=0$

[４分身解] ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x^4 -4x^3 -(2+4ch(a\pi/4))x^2 +4x +1=0$

[５分身解] ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x^5 -5x^4 -10ch(a\pi/10)ch(a\pi/5)\cdot x^3 +10x^2 +5ch(a\pi/10)\cdot x -1=0$

ここで、a は任意の実数である。

＜L(1)分割方程式＞

L(1)１分身の値を解に持つ方程式⇒ $x -1=0$

L(1)２分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2 -2x -1=0$

L(1)３分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3 -3x^2 -3x +1=0$

L(1)４分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$

L(1)５分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$

L(1)６分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$

L(1)７分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$

・・・・・・・・・・

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

５分身解をもつ方程式も、やはり興味深い形となった。

前回も指摘したが、例えば、青字の５次方程式で ch の部分を１に置き換えると、上記のL(1)分割方程式の５次の $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$ に一致する。５分身ではこのような対応が見られる。そして、この原理は１分身～４分身でも同様に成り立っている。

参考までに、上記それぞれの大元に親に当たる１分割（１分身）を下記に示しておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

<L(1)香り式の１分割>

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdot\cdot\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

<L(1)の１分割>

$1\ -1/3\ +1/5\ -1/7\ +1/9\ -1/11\ +\cdot\cdot\ =\pi/4$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ところで、今回の５次方程式導出も、なかなか大変であった。導出までの流れは以下の通りである。

＜導出までの流れ＞

まずＬ(1)香り式の５分身を求めた。その導出も時間がかかったが、解の形が未整理なので、それは略す。その５分身を解にもつ方程式を求めていった。解と係数の関係を使って方程式を求めるという形をとったのだが、計算ミスもあって x^3 の係数を出すのに非常に手間取った。とても複雑な計算になる。

$x^5, x^4,\ x^2$ 係数と定数は、４次までの方程式の類推と数値計算により、すぐ求まった。問題は、x^3 の係数と x の係数である。x^3 の係数導出は膨大な計算になった。途中計算は複雑になるのだが、だんだんときれいになっていき、最終的に $-10\mathrm{ch}(a\pi/10)\mathrm{ch}(a\pi/5)$ となった。この単純さに感動した。そして、x の係数は x^3 の係数からの類推と数値計算によりすぐ求まった。

以上。

ここで改めて上からＬ(1)香り式とＬ(1)の５次方程式を拾ってきて、それを並べよう。

［５分身解］⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^5\ -5x^4\ -10\mathrm{ch}(a\pi/10)\mathrm{ch}(a\pi/5)\cdot x^3\ +10x^2\ +5\mathrm{ch}(a\pi/10)\cdot x\ -1=0$

Ｌ(1) ５分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5\ -5x^4\ -10x^3\ +10x^2\ +5x\ -1=0$

すばらしい眺めである。

これは何かあると感じさせる。なお, a が０の場合は、上側の式は下側の式に一致する。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●Ｌ(1)香り式分割方程式とその反転方程式（前回示したもの。略）において、得られる解は全て実数解となる。厳密には予想だが、それは確実である。

ということは、過去ゼータでやってきたように、Ｌ(1)香り式分割方程式やその反転方程式でも、その方程式を固有方程式としてもつエルミート行列が存在しているに違いない。ゼータの研究の類推からそうなっていると思う。

● ゼータの香りの漂う公式をやっていて、最近、思い始めたことがある。それは、香り式に関連する新種のゼータがあるのではないか？ということである。

例えば、次のようなゼータが存在しているのではなかろうか。

$$\xi_{scnt}(x,a)=1/(^{s+1}+a^{s+1})\ -3/(3^{s+1}+a^{s+1})\ +5/(5^{s+1}+a^{s+1})\ -7/(7^{s+1}+a^{s+1})\ +\cdot\cdot$$

scnt は香りが漂うの意味”scented”からとった。a は任意の実数。a が 0 のときは、L(s)に一致する。

勘で「あるはず」と思っている段階であり、まだまだ茫漠としている。

これは、フルヴィッツ・ゼータよりももう少し深い対称性の世界に生きているゼータのような気がする。

以下あたりからの類推だが、どうだろうか。

例えば、最後の二式は（その２６３）で、また上から２番目は（その２４６）で見たものである。最後の二式はフーリエ級数のままである。。

<L(1)類似香り式　１分割>

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdot\cdot\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

<L(3)類似香り式　１分割>

$$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)S1/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

<ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母８乗-A 型）>

$$1\cos x/(1^8+16a^8)\ -3\cos 3x/(3^8+16a^8)\ +5\cos 5x/(5^8+16a^8)\ -7\cos 7x/(7^8+16a^8)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi\sqrt{2}/(64a^6))\{(K+L)P(x)\ +(-K+L)Q(x)\}/(K^2+L^2)$$

<ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母８乗-B 型）>

$$1^5\cos x/(1^8+16a^8)\ -3^5\cos 3x/(3^8+16a^8)\ +5^5\cos 5x/(5^8+16a^8)\ -7^5\cos 7x/(7^8+16a^8)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi\sqrt{2}/(16a^2))\ \{(K-L)P(x)\ +(K+L)Q(x)\}/(K^2+L^2)$$
$$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$$

ここで、a, α, β, K, L, P(x), Q(x)は以下の通り。

a は任意の実数（0 の場合 a->0）。$\alpha=(a/2)\cos(\pi/8)$, $\beta=(a/2)\sin(\pi/8)$

$K=\mathrm{ch}(2\pi\alpha)\cos(2\pi\beta)+\cos(2\pi\alpha)\mathrm{ch}(2\pi\beta)$,　$L=\mathrm{sh}(2\pi\alpha)\sin(2\pi\beta)-\sin(2\pi\alpha)\mathrm{sh}(2\pi\beta)$

$$P(x)=\sin(\pi\alpha+2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\alpha-2\alpha x)\cos(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\beta+2\beta x)+\mathrm{sh}(\pi\alpha+2\alpha x)\sin(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\beta-2\beta x)\cos(\pi\beta+2\beta x)$$
$$-\mathrm{ch}(\pi\alpha+2\alpha x)\cos(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\beta-2\beta x)\sin(\pi\beta+2\beta x)-\cos(\pi\alpha+2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\alpha-2\alpha x)\sin(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\beta+2\beta x)$$

$$Q(x)=\sin(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\beta+2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\alpha-2\alpha x)\sin(\pi\alpha+2\alpha x)+\mathrm{ch}(\pi\beta-2\beta x)\sin(\pi\beta+2\beta x)\sin(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\alpha+2\alpha x)$$
$$+\cos(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\beta+2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\alpha-2\alpha x)\cos(\pi\alpha+2\alpha x)+\mathrm{sh}(\pi\beta-2\beta x)\cos(\pi\beta+2\beta x)\cos(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\alpha+2\alpha x)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.11.20 杉岡幹生

参考文献

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)