＜ L(1)香り式の分身を解にもつ方程式　その２＞

苦戦していたL(1)香り式の分身を解に持つ方程式の４次の方程式が出たので、前回分と合わせて報告する。そしてそれに対応する反転方程式も出たので、それも紹介したい。

これまで“L(1)類似香り式”と呼んでいた呼称は、今後は“L(1)香り式”と簡潔に表現していく。また、L(1)香り式の分身の値を解にもつ方程式を”L(1)香り式分割方程式”と名付ける。

では、結果から示していく。
L(1)香り式の１分身～４分身を解にもつ各方程式は次となる。なお、ch は双曲線関数 cosh を略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)香り式分割方程式＞

L(1)香り式１分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x -1=0$
L(1)香り式２分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x^2 -2x -1=0$
L(1)香り式３分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x^3 -3x^2 -3ch(a\pi/6)\cdot x +1=0$
L(1)香り式４分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $ch(a\pi/2)\cdot x^4 -4x^3 -(2+4ch(a\pi/4))x^2 +4x +1=0$

ここで、a は任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前回のものからさらに形を整えたが、きわめて興味深い形をしている。

例えば、下記の＜L(1)香り式の２分割＞の B1,−B2 を解にもつ方程式が上記の上から２番目のものとなっている。そしてそれについては、３年前の下方 L(1)分割方程式とまったく同様にして、B1,−B2 から(π/8)を除いた $\{1+\sqrt{2}ch(a\pi/4)\}/ch(a\pi/2)$ と $\{1-\sqrt{2}ch(a\pi/4)\}/ch(a\pi/2)$ を解にもつ方程式として求めている。
他も同様であり、１分身は(π/4)を、３分身は(π/12)を、４分身は(π/16)を除いている。つまり、もっとも本質的な部分を解として採用している。

上記方程式を３年前のL(1)分割方程式と比べよう。
以下に（その１１８）から抜粋したものを並べた。上記と下記を比べると面白い類似が出ていることに気づく。
例えば、上記の４次の $ch(a\pi/2)x^4 -4x^3 -(2+4ch(a\pi/4))x^2 +4x +1=0$ は、ch の部分を１に置き換えると、下記の４次の $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$ に一致する。４分身ではこのような対応が見られる。そして、この原理は１分身～３分身でも同様に成り立っている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)分割方程式＞

L(1)１分身の値を解に持つ方程式⇒ $x -1=0$

L(1)２分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2 -2x -1=0$
L(1)３分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3 -3x^2 -3x +1=0$
L(1)４分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$
L(1)５分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$
L(1)６分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$
L(1)７分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$
・・・・・・・・・・

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

参考として、以下にL(1)香り式の分割（分身）を示しておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)香り式の１分割＞

①のL(1)香り式の１分割は次となる。その１分身は①そのものである。

$$1/(1^2+a^2) -3/(3^2+a^2) +5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -11/(11^2+a^2) +\cdots =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad ――①$$

＜L(1)香り式の２分割＞

①のL(1)香り式の２分割は次となる。２分身はB1,-B2であり、B1-B2＝①となる。

$$B1=1/(1^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +17/(17^2+a^2) -23/(23^2+a^2) +\cdots$$
$$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$B2=3/(3^2+a^2) -5/(5^2+a^2) +11/(11^2+a^2) -13/(13^2+a^2) +19/(19^2+a^2) -21/(21^2+a^2) +\cdots$$
$$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

＜L(1)香り式の３分割＞

①のL(1)香り式の３分割は次となる。３分身はA1,-A2,A3であり、A1-A2+A3＝①となる。

$$A1=1/(1^2+a^2) -11/(11^2+a^2) +13/(13^2+a^2) -23/(23^2+a^2) +25/(25^2+a^2) -35/(35^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/12)\{2\mathrm{ch}^2(a\pi/6) +\sqrt{3}\mathrm{ch}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A2=3/(3^2+a^2) -9/(9^2+a^2) +15/(15^2+a^2) -21/(21^2+a^2) +27/(27^2+a^2) -33/(33^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/12)\{2\mathrm{ch}(a\pi/3) -1\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$$A3=5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +17/(17^2+a^2) -19/(19^2+a^2) +29/(29^2+a^2) -31/(31^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/12)\{2\mathrm{ch}^2(a\pi/6) -\sqrt{3}\mathrm{ch}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

＜L(1)香り式の４分割 ＞

①のL(1)香り式の４分割は次となる。４分身はC1,-C2,C3,-C4であり、C1-C2+C3-C4＝①となる。

$$C1=1/(1^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +17/(17^2+a^2) -31/(31^2+a^2)+ 33/(33^2+a^2) -47/(47^2+a^2)+\cdots$$

$=(\pi/16)\{1+\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)+2\alpha\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)+2\beta\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$C2=3/(3^2+a^2)-13/(13^2+a^2)+19/(19^2+a^2)-29/(29^2+a^2)+35/(35^2+a^2)-45/(45^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/16)\{-1+\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)+2\beta\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)-2\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$C3=5/(5^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+21/(21^2+a^2)-27/(27^2+a^2)+37/(37^2+a^2)-43/(43^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/16)\{1-\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)+2\beta\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)-2\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$C4=7/(7^2+a^2)-9/(9^2+a^2)+23/(23^2+a^2)-25/(25^2+a^2)+39/(39^2+a^2)-41/(41^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/16)\{-1-\sqrt{2}\mathrm{ch}(a\pi/4)+2\alpha\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)+2\beta\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

ここでα,βは、$\alpha=\sin(\pi/8)=\cos(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\beta=\cos(\pi/8)=\sin(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2+\sqrt{2}}$
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

整理の意味で両方の方程式を並べておく。L(1)香り式とL(1)式も追加した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)香り式分割方程式＞

■L(1)香り式　$1/(1^2+a^2)-3/(3^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

L(1)香り式１分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x-1=0$
L(1)香り式２分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2-2x-1=0$
L(1)香り式３分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^3-3x^2-3\mathrm{ch}(a\pi/6)\cdot x+1=0$
L(1)香り式４分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^4-4x^3-(2+4\mathrm{ch}(a\pi/4))x^2+4x+1=0$

＜L(1)分割方程式＞

■L(1)式　$1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+\cdots=\pi/4$

L(1)１分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x-1=0$
L(1)２分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^2-2x-1=0$
L(1)３分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$
L(1)４分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$
L(1)５分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$
L(1)６分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$
L(1)７分身の値を解に持つ方程式 ⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$
・・・・・・

ここで、aは任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

なんともよい眺めである。

両者はとても似ている。繰り返しになるが、L(1)香り式分割方程式の ch 部を１で置き換えると、L(1)分割方程式に一致するというふしぎな規則が存在している。a＝0 とすると、L(1)香り式分割方程式はL(1)分割方程式に完全に一致する。それらは５次以上でも成り立っているはずである。

さて、冒頭で示唆した反転方程式のことである。上で見たL(1)香り式分割方程式にはそれぞれに対応する別の方程式が存在している。それをL(1)香り式分割–反転方程式と名付けよう。

形式的に a＝ai（i：虚数単位）として得られる方程式を以下に青字で示す。

****

L(1)香り式１分身の値を解に持つ方程式 $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x-1=0$

⇒反転方程式 $\cos(a\pi/2)\cdot x-1=0$

L(1)香り式２分身の値を解に持つ方程式 $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^2-2x-1=0$

⇒反転方程式 $\cos(a\pi/2)\cdot x^2-2x-1=0$

L(1)香り式３分身の値を解に持つ方程式 $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^3-3x^2-3\mathrm{ch}(a\pi/6)\cdot x+1=0$

⇒反転方程式 $\cos(a\pi/2)\cdot x^3-3x^2-3\cos(a\pi/6)\cdot x+1=0$

L(1)香り式４分身の値を解に持つ方程式 $\mathrm{ch}(a\pi/2)\cdot x^4-4x^3-(2+4\mathrm{ch}(a\pi/4))x^2+4x+1=0$

⇒反転方程式 $\cos(a\pi/2)\cdot x^4-4x^3-(2+4\cos(a\pi/4))x^2+4x+1=0$

****

これが反転方程式である。形を見ると、L(1)香り式分割方程式の ch が cos になったものといえる。これらは香り式の世界に対してその裏返しの世界のものである。だから反転～とした。

そしてこれの大元の１分身は次となる。

$$1/(1^2-a^2)-3/(3^2-a^2)+5/(5^2-a^2)-7/(7^2-a^2)+9/(9^2-a^2)-11/(11^2-a^2)+\cdots=(\pi/4)/\cos(a\pi/2)\quad\text{---②}$$

すなわち、②右辺の(π/4)値を除いた 1/cos(aπ/2)を解に持つ方程式が、上記の１分身の反転方程式 $\cos(a\pi/2)\cdot x-1=0$ である。

この②も分身たちに分かれていく（分裂していく）。

ちなみに、②は公式集にも載っている三角関数の部分分数展開式と本質的に同じものである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●L(1)香り式分割方程式とその反転方程式において、得られる解は全て実数解となる。厳密には予想だが、それは確実である。

　ということは、過去ゼータでやってきたように、L(1)香り式分割方程式やその反転方程式でも、その方程式を固有方程式としてもつエルミート行列が存在しているに違いない。ゼータの研究の類推からそうなっていると思う。

● L(1)香り式分割方程式がエルミート行列の固有方程式になっているならば、下式が直交多項式列になっているはずである。

$ch(a\pi/2)\cdot x -1$

$ch(a\pi/2)\cdot x^2 -2x -1$

$ch(a\pi/2)\cdot x^3 -3x^2 -3ch(a\pi/6)\cdot x +1$

$ch(a\pi/2)\cdot x^4 -4x^3 -(2+4ch(a\pi/4))x^2 +4x +1$

・・・・

　さらにL(1)香り式分割-反転方程式がエルミート行列の固有方程式になっているならば、下式が直交多項式列になっているはずである。

$\cos(a\pi/2)\cdot x -1$

$\cos(a\pi/2)\cdot x^2 -2x -1$

$\cos(a\pi/2)\cdot x^3 -3x^2 -3\cos(a\pi/6)\cdot x +1$

$\cos(a\pi/2)\cdot x^4 -4x^3 -(2+4\cos(a\pi/4))x^2 +4x +1$

・・・・

　公式集には、エルミート、ラゲール、チェビシェフなどの有名な直交多項式列が載っているが、上式はそれらとは似ても似つかぬ形をしている・・

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.11.06 杉岡幹生

参考文献

・「やさしい群論入門」(藤永茂、成田進著、岩波書店)

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)